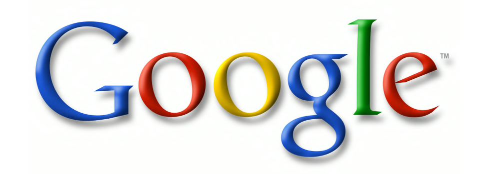
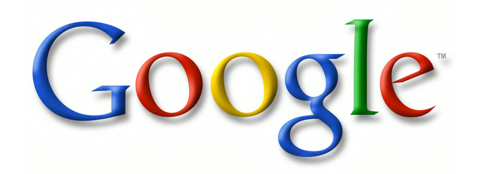








DIE ELEMENTE

DER

PROJECTIVISCHEN GEOMETRIE

IN SYNTHETISCHER BEHANDLUNG.

VORLESUNGEN

VON

DR. HERMANN HANKEL,

WEIL. ORD. PROF. DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1875.

1878, June 4,
Farrar Fund.

Vorwort.

Das vorliegende Werk, welches dem Studium der projectivischen Geometrie als Einleitung in die Elemente dienen soll, ist den hinterlassenen Schriften des früh verstorbenen Mathematikers, Prof. Dr. Hermann Hankel, entnommen und bildet den im Wesentlichen unveränderten Abdruck eines Heftes, welches der Verfasser für seine Vorlesungen zuletzt an der Universität Tübingen ausgearbeitet hatte.

Es wird dem Unterzeichneten, dem die Herausgabe anvertraut wurde, gestattet sein, Plan und Umfang des Werkes in Kürze darzulegen. Dabei sollen vor allem die Erwägungen hervortreten, welche, für den Entschluss einer Veröffentlichung massgebend, die Ueberzeugung begründeten, dass eine eigenartige Leistung hier vorliege, die als Ergebniss eingehender Studien zwar nicht neue Methoden des Beweisganges liefere, wohl aber durch die systematisch correcte und dabei fesselnde Darstellung in besonderer Weise den Zweck erfülle, gerade beim Beginne des Studiums das Interesse für die behandelte Disciplin anzuregen und zu vertiefen.

In allen Schriften, durch welche Hankel während der kurzen Wirksamkeit, die ihm beschieden war, die mathematische Wissenschaft bereicherte, ist der Gedanke zu durchgreifender Geltung gekommen, aus dem empirischen Detail die leitenden Principien herauszuheben, welche zur Einheit die Einzelheiten zusammenfassen; und aus der geschichtlichen Einleitung, die dem Folgenden vorangestellt ist, wird von neuem ersichtlich, wie tief er die Bedeutsamkeit der Ausbildung allgemeiner Principien auch in den Fortschritten der Geometrie zu erkennen wusste. Die neuere Geometrie innerhalb ihrer Grenzen schien ihm,

wie er es an einer anderen Stelle bezeichnet*), „das Ideal einer Wissenschaft beinahe erreicht zu haben“, und sein Interesse an der organischen Gliederung derselben hat in den nunmehr veröffentlichten Vorlesungen beredten Ausdruck gefunden. So werden diese auch als Lehrbuch zu dienen vor allem dadurch geeignet sein, dass sie von vornherein bestrebt sind, dem Leser die umfassenden Gedanken der grossen Geometer nahe zu bringen, durch welche die systematische Abhängigkeit der geometrischen Gestalten in ihren einfachsten Grundbeziehungen aufgedeckt ist. Dabei suchen die Vorlesungen einen klaren Ueberblick über die verschiedenartigen Methoden zu gewähren, welche zur Ausbildung der „neueren“ Geometrie in ihrer jetzigen Gestaltung geführt haben, und es muss insbesondere hervorgehoben werden, dass auch das von Poncelet begründete Verfahren der Projection, welches gegenwärtig in den Lehrbüchern der synthetischen Geometrie allzusehr zurücktritt, in den vorliegenden Entwickelungen als dienliches Hülfsmittel vielfach angewandt ist.

Wenn so die Einheit des geometrischen Gedankens gerade durch die Beherrschung vielseitiger Methoden bekundet wird, so wollen die Vorlesungen auch den Zusammenhang gewahrt wissen, in welchem die Geometrie der Alten mit der neueren Geometrie steht. In der historischen Einleitung sowohl wie in der systematischen Entwickelung selber sind daher die einzelnen Probleme gekennzeichnet, in denen sich die Forschungen der Alten mit den späteren Ergebnissen berühren, und der Vergleich der neuen Methoden mit den früheren soll ihre Einheit und Fruchtbarkeit erkennen lassen. Um dieses allgemeinen Zweckes willen sind in dem vierten Abschnitte die Aufgaben des Apollonius aufgenommen, die auf die einfachsten Principien der neueren Geometrie zurückgeführt werden.

Als systematisch vollständig durchgearbeitet werden vor allem der erste und dritte Abschnitt zu bezeichnen sein, welche die Theorie des Doppelverhältnisses und

*) „Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten.“ Ein Vortrag, Tübingen 1869.

der Transversalen, sowie die projectivischen Eigenschaften der Punktreihen und Strahlbüschel umfassen. Zuvörderst bildet die Theorie der Transversalen den eigentlichen Ausgang und die Grundlage aller folgenden Untersuchungen, die damit auf die Werke von Poncelet, Möbius und Chasles zurückgehen. Nachdem sodann im zweiten Abschnitte eine vorläufige Feststellung des Begriffes von Pol und Polare gegeben und im Anschlusse daran das allgemeine Princip der Dualität und die Anwendung der polaren Reciprocität auf projectivische und nicht projectivische Beziehungen auseinander gesetzt ist, behandelt der dritte Abschnitt die Eigenschaften der geometrischen Grundgebilde, der geraden Punktreihe und des ebenen Strahlbüschels, wesentlich auf Grund der von Steiner entdeckten Principien. Die hiermit gewonnenen Anschauungen über die Eigenschaften auf einander liegender, projectivischer Gebilde sind in dem fünften Abschnitte zu einer Darstellung der Lehre von den dioptrischen Bildern verwerthet. Die Aufnahme dieses Capitels in ein Lehrbuch der Geometrie wird als glücklicher Griff erscheinen, nachdem diese Theorie, insonderheit durch die Arbeiten von Möbius, einer so rein geometrischen Behandlung fähig geworden ist, dass sie nun selber dem Geometer zu weiteren Problemen Anlass gibt.

Die Theorie der Kegelschnitte, als der Erzeugnisse projectivischer Gebilde, geht in der Darstellung des sechsten Abschnittes zunächst auf die Poncelet'schen Anschauungen zurück, folgt aber schliesslich den Steiner'schen Gedanken, zum Theil in den Erweiterungen und Ausführungen, welche dieselben durch die späteren Arbeiten gewonnen haben. Die eingehendere Behandlung des Pascal'schen Theoremes im §. 6 glaubte ich an dieser Stelle, wiewohl sie den Gang der Untersuchung unterbricht, belassen zu müssen, weil sie eine grosse Fülle der hierauf bezüglichen schönen Sätze in verhältnissmässig kurzer Entwickelung hervortreten lässt. Die besonderen Fälle der allgemeinen projectivischen Beziehung, wie sie in den Eigenschaften der conjugirten Durchmesser und speciell der Kegelschnittaxen zur Geltung kommen, sind noch im §. 12 hervorgehoben; da-

gegen sind die Untersuchungen über die Focaleigenschaften der Kegelschnitte nicht mehr berücksichtigt.

Der letzte Abschnitt soll nur in allgemeinen Umrissen die Staudt'sche Begründung der projectivischen Beziehung aufdecken und überhaupt die Fragestellungen kennzeichnen, welche aus der Uebertragung des Begriffes der collinearen Verwandtschaft auf die gesammte Ebene erwachsen. Trotzdem die Untersuchung hierbei nur andeutend verfährt, erscheint sie doch reich an vielseitigen Betrachtungsweisen und gewährt dadurch den besten Abschluss, dass sie den Blick auf die Fragen richtet, zu denen das vorliegende Lehrbuch nur eine Einleitung bilden will.

Meine Betheiligung an der Herausgabe beschränkte sich auf eine Durchsicht des Manuscriptes, welches nur an einzelnen Stellen Ausführungen und Aenderungen zu erheischen schien. Herrn Professor F. Klein, der nach Kenntnissnahme des Manuscriptes die Veröffentlichung befürwortete, verdanke ich für die endgiltige Fertigstellung desselben zum Druck manch schätzenswerthe Bemerkungen und Rathschläge.

Leipzig, im September 1875.

(Karl Gustav)
Dr. Axel Harnack.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Theorie des Doppelverhältnisses und der Transversalen.

Zweiter Abschnitt.

Das Princip der Dualität.

Dritter Abschnitt.

Projectivische Beziehung von Punktreihen und Strahlbüscheln.

Einleitung.

Historische Uebersicht des Entwickelungsganges der neueren Geometrie.

Die „neuere Geometrie“ ist eine der jüngsten unter den mathematischen Disciplinen und wenig über funfzig Jahre alt. Ihr eigenthümlicher Charakter wird am besten erkannt aus ihrer Vergleichung mit der alten Geometrie und aus der Art und Weise, wie sie sich aus dieser historisch bildete. Dazu wird es nothwendig sein, etwas weiter auszuholen.

Die Geometrie der Alten, wie sie von Pythagoras und Plato entwickelt, von Euklid zu einem straffen System zusammengefasst, in Archimedes und Apollonius ihre höchsten Triumphe gefeiert hat, steht als ein scharf ausgeprägtes Gebilde vor unseren Augen. Jeder bewundert die Klarheit und Bestimmtheit ihrer Begriffe, die strenge Consequenz in deren Verbindung, die Einfachheit der Darstellung, welche der antiken Geometrie so eigen sind und sie seit den frühesten Zeiten als das geeignetste pädagogische Material zur strengen Schulung des Denkens erscheinen liessen. Wer aber die griechische Mathematik aus ihren Quellen selbst studirt hat, dem werden auch die Mängel nicht verborgen geblieben sein, welche ihr ebenso charakteristisch, in den modernen Darstellungen der elementaren Geometrie indess mit Recht möglichst verwischt sind: die Alten kennen nur den synthetisch fortschreitenden Entwickelungsgang vom Einzelnen zum Einzelnen, vom Einfachen zum Zusammengesetzten; — es fehlen ihnen allgemeine Principien und Methoden. Sie haben eine entschiedene Vorliebe für das Specielle und für die engste Begrenzung der Begriffe. Es hat z. B. wohl nie ein alter Geometer darauf aufmerksam gemacht, dass der Winkel zwischen zwei Geraden im Grunde nicht Einer, sondern dass zwei Winkel mit demselben Rechte als Maass der

Neigung zweier Geraden gegen einander angesehen werden können. Oder, um ein anderes Beispiel zu geben: Wenn die Aufgabe gestellt ist, eine begrenzte Gerade AB nach einem gewissen Gesetze in einem Punkte C zu theilen und es gibt die Construction, in ihrer Allgemeinheit aufgefasst, nicht nur einen zwischen A und B liegenden Punkt C, sondern ausserdem noch einen anderen C' ausserhalb der beiden, so wird der Grieche letzteren ohne weiteres ignoriren und wie z. B. bei der Construction des goldenen Schnittes nur den Punkt C als Lösung der Aufgabe betrachten; selbst dann, wenn er auf den Punkt C' aufmerksam wurde, sah er ihn doch als eine Lösung einer von der früheren verschiedenen, wenn auch mit ihr verwandten, Aufgabe an.

So viele in Bezug auf die Lage der gegebenen und gesuchten Linien unterscheidbare Fälle in einer Aufgabe möglich sind, so viele gesonderte Probleme oder Theoreme sind für den griechischen Geometer vorhanden, und die grössten Mathematiker des Alterthums haben es für nothwendig gehalten, in ihren Schriften die sämmtlichen denkbaren, oft sehr zahlreichen Fälle von einander unabhängig, und mit gleicher Ausführlichkeit und Genauigkeit zu untersuchen. So behandelt z. B. des Apollonius berühmte Schrift *περὶ λόγου ἀποτομῆς* (de sectione rationis) eine und dieselbe Aufgabe in etwa 80 nur durch die Lage verschiedenen Fällen.

Dem entsprechend kommt es denn auch dem griechischen Geometer weder in den Sinn, eine allgemeine Methode zu entwickeln oder auch nur anzudeuten, nach der im Wesentlichen diese verschiedenen Fälle behandelt werden können, noch wird er aus den concreten Fällen ein allgemeines Resultat abstrahiren; höchstens findet sich am Schlusse eine magere Recapitulation, in der bemerkt wird, dass die Aufgabe, wie man aus dem Vorhergehenden ersehe, in jedem denkbaren Falle unter den gegebenen Bedingungen lösbar sei.

So opfert die antike Geometrie zu Gunsten einer scheinbaren Einfachheit die wahre Einfachheit auf, welche in der Einheit der Principien besteht, und erreicht eine triviale s i n n l i c h e Anschaulichkeit auf Kosten der Erkenntniss vom Zusammenhang geometrischer Gestalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit ihrer sinnlich vorstellbaren Lage.

Die grosse Veränderung, welche die Mathematik in dieser Beziehung durch die modernen Culturvölker erleiden sollte, spricht sich in sehr entschiedener Weise aus von dem ersten Momente an, wo die Mathematik am Ende des XV. Jahrhunderts einen neuen Aufschwung nahm. So gering anfangs die Erfolge waren, so erkennt man doch sofort das Streben nach Allgemeinheit der Methode, selbst auf Kosten ihrer Präcision; nach der analytischen Entwickelung des Speciellen aus dem Allgemeinen, selbst auf Kosten der Strenge; und nach dem Zusammenfassen des Verschiedenen unter Einen Gesichtspunkt, selbst wenn die Evidenz dadurch leiden sollte. Alle diese Neigungen konnten sich frei auf dem Gebiete der Arithmetik und Algebra bethätigen; denn hier hatten die Alten keine oder nur solche Vorarbeiten hinterlassen, welche dieser Behandlung nicht entgegen standen. Anders war es mit der Geometrie. Hier lagen den Mathematikern der Renaissance eine Reihe griechischer Meisterwerke von so vollendetem und geschlossenem Bau vor, dass man an ihnen nicht rütteln, dass man keinen Stein hinwegnehmen oder hinzusetzen konnte. Die Ehrfurcht vor diesen Werken war unbegrenzt, man studirte und commentirte sie mit unendlichem Fleisse, aber man kam immer mehr zu der Ansicht, dass man mit den Alten auf diesem Wege niemals concurriren könne.

So versuchte man es denn auf einem andern: man unterwarf die geometrischen Objecte als Grössen einer algebraischen Behandlung, und dem grossen Philosophen des XVII. Jahrhunderts Descartes gelang es, nach Einführung des Begriffes der veränderlichen Grösse auch die Natur krummer Linien in Formeln zu fassen und dem Calcul zu unterwerfen. Man nannte diese von Descartes im Jahre 1637 bekannt gemachte Methode die analytische Geometrie, theils weil sie in der That im Gegensatze zu der synthetischen Geometrie der Alten den analytischen Weg (im Sinne der Logik) einschlägt, theils weil man sich damals schon daran gewöhnt hatte, die Rechnung mit allgemeinen Grössen überhaupt als Analysis zu bezeichnen.

Es erwuchsen aber aus dieser analytischen Geometrie neue Probleme, welche die Alten zwar theilweise in speciellen

Fällen gelöst hatten, die aber jetzt in principieller Allgemeinheit auftraten: die Aufgaben, an jede analytisch bestimmte krumme Linie Tangenten zu ziehen, den von ihnen umschlossenen Flächenraum zu finden u. s. w. In der am Ende des XVII. Jahrhunderts entdeckten Analysis des Unendlichen fanden dann diese Probleme in der That ihre Lösungen, freilich auf einem der Geometrie gänzlich fremden Wege. Die neu entstandene, von aller früheren Mathematik am weitesten entfernte Disciplin, die Analysis, nahm indess leicht begreiflicher Weise für sich selbst die Aufmerksamkeit aller productiven Talente ungetheilt in Anspruch. Nur selten und vorübergehend beschäftigte sich noch hie und da ein namhafter Mathematiker mit eigentlich geometrischen Untersuchungen. Im XVIII. Jahrhundert wurde man der geometrischen Methode so ungewohnt, dass man Sätzen, die früher geometrisch auf natürliche und einfache Weise gefunden worden waren, erst durch einen analytischen Beweis die wahre mathematische Gewissheit geben zu müssen glaubte; ja man nannte solche, oft recht ungeschickte und verwickelte Beweise gar eine démonstration en forme. Selbst die analytische Geometrie, soweit sie nicht blosse Anwendung der Analysis war, machte nur geringe Fortschritte — rein geometrische Sätze von irgend welcher Bedeutung sind durch sie, soviel mir bekannt, kaum gefunden worden; ihre Methode hatte sich seit Descartes wenig verändert; sie operirte auch in dem Werke eines Euler (Introd. in anal. infin. t. II. 1748) immer noch vorzugsweise an Figuren, auf welche sie bald Constructionen bald Calcul anwandte, und bewegte sich sehr schwerfällig durch complicirte Eliminationen. So ist es begreiflich, dass man sich selbst da, wo die Geometrie recht eigentlich hingehörte, darin gefiel, dieselbe zu ignoriren; und Lagrange war stolz darauf, eine Mechanik geschrieben zu haben, in der sich keine Figur fand. Freilich war sein Verdienst gross gegenüber seinen Vorgängern, aber es war einseitig, wie diese ganze analytische Richtung es war.

Die Reaction konnte nicht ausbleiben; sie ging jedoch nicht zunächst von der Wissenschaft als solcher, sondern von der Technik aus. Die ehrsamen Handwerksmeister der

früheren Jahrhunderte hatten nach alten Traditionen, die aus langer Erfahrung hervorgegangen von Geschlecht zu Geschlecht überliefert waren, ihre Kirchen und Schlösser, ihre Brücken und Kanäle gebaut, ihre Werksteine und Balken geschnitten, ihre Schiffe und Maschinen construirt. Schon mit dem XVII. Jahrhundert aber begann der Verfall des städtischen Handwerks, und den neuen Anforderungen der sich entwickelnden Industrie, dem revolutionären Sinne des XVIII. Jahrhunderts konnten diese Traditionen nicht genügen; es musste an ihre Stelle ein rationelles, durch die Wissenschaft geleitetes Verfahren treten. Der Techniker aber braucht zu seinen Arbeiten Zeichnungen; er ist geübter im Zeichnen, als im Rechnen; und konnte und wollte von der analytischen Geometrie möglichst wenig Gebrauch machen; er bedurfte einer directeren Methode.

Die Befriedigung dieses Bedürfnisses ging von Frankreich aus, das überhaupt in jener Zeit unbestritten das geistige Principat in Europa behauptete. Aus allen diesen vereinzelten Bestrebungen aber zog der geniale Mathematiker Monge das Facit; er schuf die Géométrie descriptive (darstellende Geometrie) d. h. die Kunst, alle vollständig bestimmten Formen räumlicher Linien, Flächen und Körper in einer Ebene als Aufriss und Grundriss nach allgemeinen, gleichmässigen Regeln darzustellen und aus solchen Darstellungen die geometrischen Beziehungen abzuleiten, welche aus der Gestalt und gegenseitigen Lage der räumlichen Objecte entspringen. Die neue Lehre, welche zuerst an der 1794 gegründeten École normale, dann an der École polytechnique in Paris öffentlich vorgetragen wurde, hatte einen grossartigen, durchschlagenden Erfolg. Für die geometrische Wissenschaft aber schuf sie den bis dahin unbekannten Begriff der geometrischen Allgemeinheit und der geometrischen Eleganz.

„Die alte Geometrie strotzt von Figuren“, ihre Figuren wimmeln von Buchstaben, die nach altem Gebrauche, dem Gange der Constructionen entsprechend, in alphabetischer Ordnung eingetragen sind. Der Leser muss, wenn er ein geometrisches Werk studirt, fortwährend vom Text auf die Figur hinüberschweifen, in dem Gewirre der Buchstaben den

gewünschten tappend suchen. Das Raisonnement in diesen Schriften ist zwar einfach, aber dürr und geistlos. Weil ohnehin der Text nicht ohne Hilfe der Figur verstanden werden kann, so ist nichts gethan, um schon durch den Text selbst ein geistiges Phantasiebild des betreffenden geometrischen Objectes zu erzeugen. Ja dem Beispiele der Alten folgend unterliess man in geometrischen Schriften jede Vermittelung zwischen den Sätzen, verwischte meist jede Spur ihrer genetischen Entwickelung und überschüttete den Leser mit unvermittelten Sätzen, mit Proportionen und Figuren.

In der Analysis war man längst eine andere, freiere, geistvollere Form gewohnt geworden: Euler und Lagrange hatten das geschaffen, was man analytische Eleganz nennt; ihre Schriften und die ihrer Nachfolger hatten die alte pedantische Form verlassen, und an deren Stelle die fliessende Darstellung und fortlaufende Entwickelung gesetzt, die den Leser überall mit den leitenden Ideen bekannt macht.

Es war nothwendig, dass die Geometrie, wenn sie aus der engen Studierstube in den Hörsaal treten und damit ein neues Leben beginnen sollte, einen ähnlichen Fortschritt machte. Diesen Fortschritt aber verdankt man Monge; seine Werke sind wahre Muster eleganter, fliessender Darstellung, frei von all jenem veralteten Rüstzeug. Er, der Erfinder des wissenschaftlich begründeten Zeichnens war es, der den herkömmlichen Wust von Figuren aus der Geometrie hinausfegte, nicht weil er, wie Lagrange, die geometrische Anschauung zurückdrängen, sondern vielmehr, weil er sie gerade dadurch fördern wollte, dass er durch seine Beschreibung ein geistiges Bild entstehen liess. Freilich musste, um dies zu erreichen, die geometrische Sprache aus ihrer bisherigen Armuth heraustreten und alle zweckentsprechenden Mittel benutzen; an Stelle der unübersichtlichen Bezeichnung der einzelnen Punkte durch Buchstaben nach alphabetischer Ordnung musste eine Beschreibung der Figur treten, welche deren Hauptlinien übersichtlich gruppirt, sie auch demgemäss bezeichnet, so dass man durch die Buchstaben leicht an die Bedeutung des geometrischen Objectes erinnert wird u. s. w. In allem diesen war Monge ein Meister; durch seine Lehrthätigkeit in der École polytechnique zu deren blühendster

Zeit verbreitete er diesen Geschmack in Frankreich; von hier aus und durch seine Schriften wurde dieser Styl dann Muster und fast Allgemeingut aller geometrischen Schriftsteller. „Der Styl der Darstellung ist aber immer auf das innigste mit dem Geiste der Methoden verbunden.“

Der zweite, grosse Fortschritt, den die Geometrie durch Monge und seine Schüler machte, war der, dass sie sich zu einer freieren und allgemeineren Anschauung der Lageverhältnisse von Figuren erhob. Es liegt schon in der Natur der darstellenden Geometrie, dass es ihr zufällig ist, ob eine Gerade AB innerhalb dieser Strecke oder ausserhalb derselben von einer anderen geschnitten wird; denn es genügt, eine andere Stellung des zu zeichnenden Körpers gegen die horizontale oder verticale Ebene anzunehmen, um sofort alle diese Verhältnisse nach Belieben zu verändern. Parallele Linien erscheinen dann, wie es schon der bedeutende Geometer des XVII. Jahrhunderts Desargues († 1661 zu Lyon) ausgesprochen hatte, nicht als wesentlich verschieden von sich schneidenden Geraden, vielmehr als solche, deren Durchschnitt in's Unendliche gerückt ist. Aber auch das in der Analysis und Algebra längst heimisch gewordene Imaginäre bildete kein Hinderniss mehr für die geometrische Betrachtung; Monge sah es als eine „zufällige Folge“ der zufälligen Lageverhältnisse an, welche auf die wesentlichen Eigenschaften solcher Gebilde, die durch eine permanente Eigenschaft definirt sind, keinen Einfluss haben kann.

Denken wir uns z. B. zwei Kreise in einer Ebene; dieselben können sich entweder schneiden oder nicht; im ersten Falle gibt es eine Gerade, welche deren Durchschnittspunkte verbindet (gemeinschaftliche Sehne); im anderen Falle sind die Durchschnittspunkte imaginär, d. h. sie haben keine anschauliche geometrische Bedeutung mehr. Es fragt sich aber, ob nicht auch in diesem Falle eine Gerade existirt, welche jener gemeinschaftlichen Sehne im ersten Falle entspricht. Um diese Frage zu beantworten, werden wir zunächst eine Eigenschaft jener gemeinschaftlichen Sehne suchen müssen, welche jene beiden Durchschnittspunkte nicht mehr unmittelbar enthält. Eine solche lässt sich in der That für jeden Punkt P der Linie aufstellen: es ist nämlich (Fig. 1 f. S.)

$$PA \cdot PB = \overline{PT_1}^2 = \overline{PT''}^2 = \overline{M_1P}^2 - \overline{M_1T_1}^2$$
$$= \overline{M_2P}^2 - \overline{M_2T_2}^2 .$$

Auf welcher Linie (Fig. 2) liegen nun die Punkte, für welche $PT_1 \doteq PT_2$, wenn sich die beiden Kreise nicht schneiden? Ist P ein solcher Punkt, dass $t_1 = t_2$, so ist also $x^2 - r_1^2 = y^2 - r_2^2$; fällt man nun von P ein Perpendikel PQ auf $M_1 M_2$, so folgt aus $0 = t_1^2 - t_2^2$ unmittelbar $M_1Q^2 - M_2Q^2 = r_1^2 - r_2^2$, und umgekehrt ist letzteres die Bedingung der Gleichheit der Tangenten für jeden auf der Linie PQ gelegenen Punkt. Wir haben also eine Gerade gefunden, welche immer reell bleibt, welche zufällige Lagen auch die Kreise haben mögen und welche in der permanenten Beziehung zu den beiden Kreisen steht, dass für alle ihre Punkte die Länge der

Fig. 1.

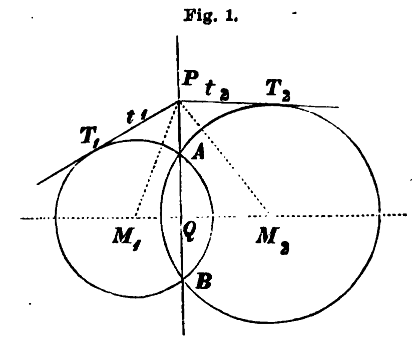
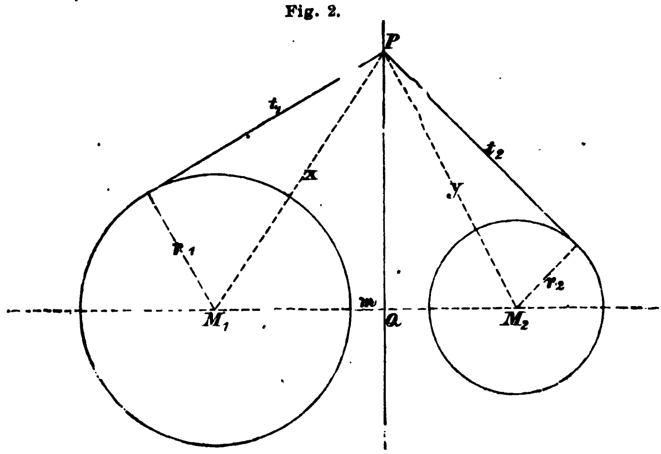


Fig. 2.



Tangenten an beide Kreise dieselbe ist. Im ersten Falle enthält die Linie die beiden reellen Durchschnittspunkte, im letzteren wird man daher sagen, sie enthalte in sich die beiden imaginären Durchschnitte. Im letzteren Falle lassen sich von allen Punkten der betreffenden Geraden reelle Tangenten an beide

Kreise ziehen, im ersteren dagegen nur von den ausserhalb der Kreise liegenden; man sagt daher, die von den Punkten der Durchschnittssehne *AB* gezogenen Tangenten an beide Kreise seien zwar imaginär, aber auch gleich lang. Diese Betrachtungen sind zuerst (im J. 1813) von einem Schüler Monge's, von Gaultier, angestellt worden, der jener Geraden den Namen: Radicalaxe gab; später hat man dieselbe auch wirkliche oder ideale gemeinschaftliche Sehne beider Kreise, oder auch die Potenzlinie genannt, indem man unter der Potenz eines Punktes P in Bezug auf einen Kreis M mit dem Radius r die Differenz $\overline{MP}^2 - r^2$ verstand.

Die Bedeutung, welche das vorhin besprochene Princip für die geometrische Forschung hat, wird nun sogleich hervortreten, wenn ich bemerke, dass man die Eigenschaften, welche an diesen Potenzlinien bei irgend einer Lage der Kreise aufgefunden werden, sofort als allgemeine derselben ansieht. Denken wir uns z. B. drei beliebige Kreise in einer Ebene, die sich nicht schneiden, und construiren die Potenzlinien je zweier, so werden sich die drei Linien in einem Punkte schneiden, dessen Potenz in Bezug auf alle drei Kreise dieselbe ist. Das ist unmittelbar einleuchtend; man schliesst aber daraus sofort, dass auch die drei Sehnen sich wirklich durchschneidender Kreise sich in einem Punkte schneiden, was nicht so unmittelbar einleuchtend ist und auch in der That allen Geometern bis in den Anfang des XIX. Jahrhunderts entgangen zu sein scheint.

So verschaffte sich die Geometrie in allen ähnlichen Fällen eine Freiheit der Bewegung, die, vom Standpunkte der alten Geometer angesehen, einer wahren Zügellosigkeit glich und die bisherige Evidenz und Solidität der Geometrie im höchsten Grade zu gefährden schien. In der That konnte jenes Princip, das Poncelet später das der Continuität genannt hat, insofern es die verschiedenen concreten Fälle in einen Zusammenhang setzt, geometrisch nicht bewiesen werden, eben weil das Imaginäre nicht anschaulich ist. Es war dies vielmehr ein Geschenk, welches die reine Geometrie von der Analysis empfing, wo die imaginären Grössen sich in allen Rechnungen gerade so verhalten, wie die reellen. Nur die Gewohnheit, reelle und imaginäre Grössen als analytisch

gleichberechtigt anzusehen, führte auf jenes Princip, das ohne analytische Geometrie niemals hätte entdeckt werden können. So wurde der reinen Geometrie wiederum vergütet, dass sich die Analysis so lange des ausschliesslichen Interesses der Mathematiker bemächtigt hatte; ja es war vielleicht von Vortheil, dass die Geometrie zeitweilig brach gelegen hatte, während dessen das andere Feld reichliche Frucht trug, die nun als Aussaat auf dem frischen Acker um so gedeihlicher sich entwickeln konnte. —

Die darstellende Geometrie hat die Aufgabe, **räumliche** Figuren in einer **Ebene** darzustellen, die geometrischen Eigenschaften ersterer aus ihren Rissen zu entwickeln und umgekehrt. Es musste dabei von selbst die Bemerkung gemacht werden, dass die Risse in der Ebene zuweilen sehr interessante Eigenschaften zeigten, welche einfache Folgen der Beziehungen im Raume von drei Dimensionen waren, deren directer Beweis in der Ebene sich aber nicht so einfach gestaltet. So ist z. B. nichts leichter, als die zuvor besprochenen Sätze von der Potenzlinie an der Kugel abzuleiten. Denken wir uns eine Kugel durch zwei Ebenen geschnitten in zwei Kreisen C, C'; auf der Durchschnittslinie beider Ebenen nehmen wir einen beliebigen Punkt P und legen von ihm alle möglichen Tangenten an die Kugel, so werden sich unter diesen auch die Tangenten an jene beiden Kreise befinden; alle jene Tangenten sind aber einander gleich. Klappen wir nun die beiden Ebenen in eine zusammen, indem wir sie um ihre Durchschnittslinie drehen, so erhalten wir eine ebene Figur, in welcher diese Linie die Potenzlinie der beiden Kreise C, C' ist.

Der Satz von den drei Potenzlinien ist gerade in dem Falle, dass sich die drei Kreise schneiden, im Raume sofort evident: denken wir uns um die Mittelpunkte der Kreise Kugeln beschrieben, deren Aequatoren die gegebenen Kreise sind, so schneiden sich je zwei dieser Kugeln in einem Kreise, dessen Ebene senkrecht auf der gemeinschaftlichen Aequatorealebene steht und diese in der gemeinschaftlichen Secante der beiden Kreise schneidet. Die Ebene, welche die den Kugeln I und II gemeinschaftlichen Punkte enthält, schneidet sich mit der, die gemeinschaftlichen Punkte von II und III

enthaltenden in einer Geraden, welche auf der Aequatorealebene senkrecht steht, und welche die den Kugeln I, II, III gemeinschaftlichen Punkte enthält. Es muss somit auch die Durchschnittsebene von I und III durch diese Gerade hindurchgehen; mit anderen Worten, jene drei Durchschnittsebenen gehen durch dieselbe auf der Aequatorealebene senkrechte Gerade und es schneiden sich die drei Spuren der Ebenen auf der Aequatorealebene in dem Punkte, welcher zugleich die Spur des gemeinschaftlichen Durchschnittes jener drei Ebenen ist. q. e. d.

Man ersieht schon hieraus, von welcher Bedeutung Monge's Leistungen für die Entwickelung der Geometrie gewesen sind. Das Interesse an der räumlichen Gestalt, das so lange hinter dem Interesse an abstracten Grössenbeziehungen zurückgetreten war, erwachte mit neuer Frische. Monge selbst und die grosse von ihm gegründete Schule bereicherten die Geometrie mit einer Reihe der allerbedeutendsten Entdeckungen; ich nenne unter diesen nur eine der bekanntesten und elementarsten: die der Erzeugung des hyperbolischen Hyperboloides und Paraboloides durch gerade Linien; wie denn überhaupt die Untersuchung der bisher nur kümmerlich bekannten Flächen 2ter Ordnung eines der wichtigsten Arbeitsfelder dieser Schule war. Es ist unmöglich, hier nur einigermassen erschöpfend die vielseitigen Leistungen dieser Schule oder nur die Männer alle namhaft zu machen, welche in den 15 Jahren, die Monge als Lehrer der École polytechnique (1795—1809) wirkte, aus seiner Schule hervorgegangen sind: Hachette, Charles Dupin, Brianchon, Malus, Gaultier, Biot, Lancret u. s. w. Poinsot übertrug die geometrische Klarheit Monge's auf die Mechanik und schrieb eine Statik (1804), welche der Lagrange's an Eleganz nichts nachgab, aber klarer, einfacher, anschaulicher war und sich als höchst fruchtbar erwiesen hat.

Ich kann von Monge nicht scheiden, ohne noch seiner anderen epochemachenden Leistungen zu gedenken, durch welche er zwar nicht unmittelbar, aber doch mittelbar die neuere, synthetische Geometrie mächtig förderte. Monge ist auch der Vater der neueren analytischen Geometrie. Er hat, worin ihm allerdings Lagrange mit einigen Abhand-

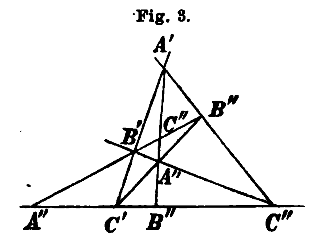
lungen vorangegangen war, die analytische Geometrie gereinigt von der starken Vermischung mit Sätzen der alten Geometrie; er hat in ihr zuerst planmässig rein analytische Methoden angewandt und gezeigt, wie man ohne Herbeiziehung anderer Sätze, durch die Verbindung der Gleichungen der Linien, die Probleme der analytischen Geometrie einfacher und eleganter lösen kann, als nach der älteren Manier: „Indem Monge die Gleichung der geraden Linie in die analytische Geometrie einführte, und dadurch den Grund zur Verbannung aller Construction aus derselben legte, gab er ihr jene neue Form, durch welche ihre weitere Ausbildung möglich wurde“ (Plücker anal. geom. Entw. t. II. p. 4). Monge, Application de l'algèbre à la géométrie 1805. Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie 1795. Allgemeine Verbreitung dieser neuen Form durch Biot Traité analytique des courbes et des surfaces 1802. Essai de géom. analyt. 1805.

In derselben Zeit wurde auch ein neuer Anfang gemacht mit einer anderen Richtung der Geometrie, welche zwar der antiken näher stand, als die bisher besprochene, sich aber doch weit über alles andere erhob. Monge und seine Schule beschäftigten sich hauptsächlich mit den Gestaltsverhältnissen namentlich der Flächen und Curven im Raume von drei Dimensionen, der überhaupt, so zu sagen, der Geometrie erst jetzt zugänglich geworden war. In einem gewissen Gegensatze hiezu behandelte Carnot in seiner Géométrie de position (1803) wesentlich die Grössenverhältnisse der Figuren, namentlich die bei Schnitten durch Transversalen entstehenden. Die alte Geometrie beschäftigte sich, wie bekannt, fast ausschliesslich mit den geometrischen Grössen, und so kann es nicht wundernehmen, dass Carnot, der wie so viele seiner Landsleute keine mathematisch-historische Gelehrsamkeit besass, manche Sätze von Neuem erfand, welche dem Alterthume schon bekannt waren. Lag nun schon ein gewisses Verdienst in dem Auffrischen solcher alten bestäubten Wahrheiten, so beschränkte sich doch das Verdienst Carnot's keineswegs darauf; denn er bereicherte auch die Wissenschaft mit gar manchen neuen Sätzen dieser Art, denen er überdem durch Einführung des Negativen eine auf die verschiedensten

Lagenverhältnisse sofort übertragbare Form gab. Deshalb nannte er seine Geometrie die der „Position", weil sie eben alle Positionen mit einem Male behandelte; das Wort hat sich ebensowenig wie seine Methode in der Wissenschaft gehalten und hat nichts mit dem zu thun, was man heute „Geometrie der Lage" nennt.

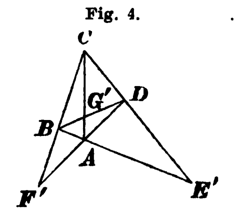
Es mag hier nicht unerwähnt bleiben, dass man Carnot die Einführung des Begriffes eines vollständigen Vierseits (quadrilatère complet) verdankt. Man versteht darunter das System von 4 Geraden in einer Ebene, die nach allen Seiten hin unbegrenzt verlängert gedacht, sich in 6 Punkten, den Ecken des Vierseits schneiden; je zwei Gegenecken werden dann durch Diagonalen verbunden, deren somit 3 vorhanden sind, und die Diagonalen schneiden sich in zwei Punkten.

Fig. 3.



Man hat es später auch für nothwendig erkannt, den Begriff eines vollständigen Vierecks einzuführen. Man versteht darunter ein System von 4 Punkten *ABCD* mit den 6 sie verbindenden Linien, den Seiten des Vierecks. Je zwei Gegenseiten schneiden sich in einem Punkte.

Fig. 4.



Beide Begriffe sind Erweiterungen des Begriffes vom einfachen Viereck, wie diesen die alte Geometrie kennt; wir haben hier eine der Erweiterungen, die für die neuere Geometrie so charakteristisch und für ihren Fortschritt unentbehrlich waren.

Wenn man von Monge's Géométrie descriptive und Carnot's Géométrie de position die Periode des Aufschwunges der Geometrie datirt, so geschieht dies mit vollem Rechte; den Beginn der „neueren Geometrie" als einer neuen Disciplin wird man jedoch erst etwas später ansetzen können. Denn es wurde durch jene Leistungen die Wissenschaft eigentlich nur befreit von den Fesseln, in welche sie von den Griechen geschlagen war, von den Fesseln, welche für die eigenthümliche Organisation des griechischen Geistes vielleicht keine waren, indessen bei der so veränderten Anlage der neueren

europäischen Völker sich als schwere Bande erwiesen hatten, welche jeden Schritt hemmten. Eigentlich neue Methoden, welche ein ganzes Gebiet unbekannter Wahrheiten sozusagen von selbst producirten, Methoden, welche alle Aufgaben einer gewissen Gruppe zu lösen erlaubten, wie dies mit der analytischen Methode der Fall ist, und wie sie uns nun einmal als der Ausdruck wahren wissenschaftlichen Fortschrittes erscheinen, hatten sie nicht entwickelt.

Dies geschah vielmehr erst durch einen der späteren Schüler Monge's, den Ingenieur Poncelet, der in den Jahren 1812—14 als russischer Kriegsgefangener in Saratow Musse und geistige Frische genug besass, um den Grund des berühmten Werkes zu legen, das 1822 erschien: Traité des propriétés projectives des figures.

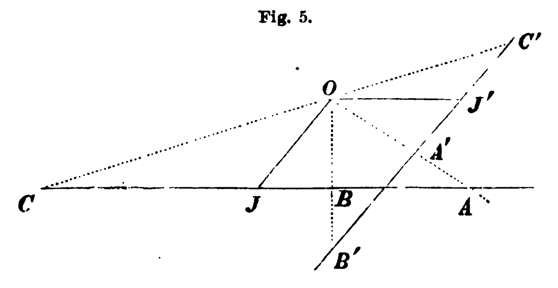
Das Fundamentalprincip dieses ungemein reichhaltigen Werkes besteht darin, die Eigenschaften ebener Figuren zu studiren, welche bei einer gewissen Transformation oder Projection derselben unverändert bleiben, und welche ebendeshalb „projectivische Eigenschaften" genannt werden. Diese Projection ist aber nicht die mittels paralleler Linien, wie die Monge's und der darstellenden Geometrie, sondern die sogenannte Centralprojection, die der Perspective.

Das perspectivische Bild eines räumlichen oder ebenen Objectes erhält man, wenn man sich vor dem Objecte eine durchsichtige Tafel angebracht denkt und auf dieser Tafel die Linien und Punkte verzeichnet, welche mit denen des wirklichen Objectes zusammenzufallen scheinen. Wir erhalten also die perspectivische Abbildung eines Objectes, indem wir alle Punkte desselben mit dem Augenpunkte O verbinden und die Durchschnitte dieser Projectionsstrahlen mit der Bildebene verzeichnen.

Bleiben wir bei der Abbildung ebener Figuren stehen, denken uns die Ebene derselben E etwa horizontal, die Bildebene E' dagegen geneigt, den Augenpunkt O oberhalb beider, so wird also A' die Abbildung von A, B' die von B sein. Den Punkten des Horizontes, d. h. den unendlich entfernten Punkten der Ebene E entspricht in der Bildebene E' eine einzige Gerade i', die Fluchtlinie, wie man sie nennt; auf dieser schneiden sich z. B. die Bilder jedes Systemes von

parallelen Linien. Poncelet drückte dies Verhältniss sehr treffend so aus: alle unendlich entfernten Punkte

Fig. 5.



einer Ebene liegen auf einer einzigen (unendlich entfernten) Geraden. Die Bilder zweier beliebigen parallelen Geraden schneiden sich stets in der Fluchtlinie *i'*. Alle Punkte einer gewissen endlich entfernten Geraden *i* der Ebene *E* projiciren sich auf die Bildebene *E'* in's Unendliche, u. s. w.

In der Durchschnittslinie *s* jener beiden Ebenen, der Projectionsaxe, fallen die Punkte mit ihren Bildern zusammen, und es schneidet sich auf derselben jede Gerade der Ebene *E* mit ihrem Bilde in *E'*.

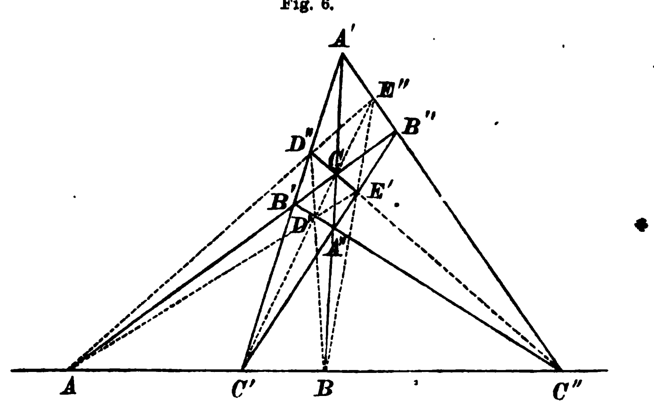
Es gibt nun eine Reihe von Eigenschaften der Figuren, welche bei ihrer Projection nicht verändert werden; das sind vor allem ihre sogenannten descriptiven Eigenschaften, wie Poncelet sie nennt, oder, wie man sie heute gern bezeichnet, die nur auf die Lage bezüglichen. So leuchtet ein, dass wenn sich drei Geraden in einem Punkte schneiden, auch deren Bilder sich in einem Punkte schneiden werden, dass wenn drei oder mehr Punkte einer Figur auf einer Geraden liegen, auch deren Bilder auf einer Geraden, wenn auch in anderen Abständen von einander liegen werden. Dabei kann es sich nun ereignen, dass z. B. jener Durchschnittspunkt der drei Geraden in's Unendliche fällt und diese somit parallel werden, oder dass von jenen Punkten auf einer Geraden einer oder alle in's Unendliche rücken, wodurch sich denn die Figur in eine speciellere verwandelt; so ist es z. B. immer möglich ein beliebiges Viereck in ein Parallelogramm, einen beliebigen Kegelschnitt in einen Kreis zu projiciren.

Poncelet hatte nun den geistreichen Gedanken, diese Bemerkung zur Ableitung der anf die Lage bezüglichen

Theoreme zu benutzen. An Parallelogrammen und an Kreisen lassen sich mittels der elementarsten Mittel zahlreiche Sätze beweisen, die zwar an diesen Gebilden selbst ganz trivial und nicht erwähnenswerth sind, die aber sofort die interessantesten Sätze geben, wenn man sie projicirt.

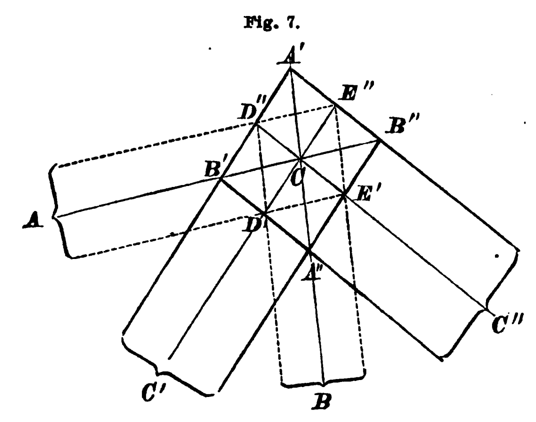
Es seien z. B. A' A'', B' B'', C' C'' je die Gegenpunkte eines vollständigen Vierseites, A, B, C die Durchschnitte

Fig. 6.



ihrer Diagonalen; wir verbinden C mit C' und C'' und erhalten durch den Durchschnitt dieser beiden Geraden mit dem Vierseit ein Viereck $E'E''D''D'$, dessen Eigenschaften nun weiter untersucht werden sollen.

Fig. 7.



Dazu projiciren wir das Vierseit so, dass seine beiden Ecken C', C'' in's Unendliche fallen; dann verwandelt sich

das Vierseit in ein Parallelogramm, die Linien CC', CC'' werden parallel mit den Seiten desselben und $E'E''D''D'$ wird wieder ein Parallelogramm, d. h. die Seiten desselben schneiden sich im Unendlichen, oder auf derselben unendlich entfernten Geraden, wo auch C', C'' liegen. Noch mehr: die Linien $D'E'$, $D''E''$ sind parallel der CB', schneiden sich also mit CB' in deren unendlich entferntem Punkte; der Durchschnitt aber von CB' mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene ist nichts anderes als A. Ebenso sieht man, dass $D'D''$, $E'E''$ sich in B schneiden, und wir haben somit, wenn wir jetzt unser Parallelogramm wieder rückwärts projiciren, den Satz:

Verbindet man zwei gegenüberliegende Ecken eines vollständigen Vierseites mit dem dritten Durchschnittspunkte der Diagonalen, so bestimmen die Verbindungslinien auf den Seiten des Vierseits ein Viereck, dessen Gegenseiten sich in den Durchschnitten der Diagonalen des ursprünglich gegebenen Vierseits schneiden. —

Es sind jedoch nicht allein Verhältnisse der Lage, sondern es gibt auch solche des Maasses, welche sich bei einer Projection nicht verändern. Freilich verändert sich bei der Projection die Strecke AB und, wenn drei Punkte auf einer Geraden liegen, im Allgemeinen auch das Verhältniss $\frac{AC}{CB}$; sind aber 4 Punkte A, B, C, D auf einer Geraden gegeben, so hat das sogenannte Doppelverhältniss in der Projection denselben Werth wie in der ursprünglichen Figur. Vier harmonische Punkte z. B. bleiben bei jeder Projection in harmonischer Lage.

So gibt es noch andere Maassverhältnisse, welche projectivisch sind; um solche an einer gegebenen Figur nachzuweisen, projicirt Poncelet dieselbe wiederum so, dass sie eine einfachere Gestalt annimmt, an welcher sich jenes Verhältniss mit leichten Mitteln erschliessen lässt.

So wär denn in der That eine neue geometrische Methode zur Auffindung und Entwickelung einer sehr umfassenden Klasse von Eigenschaften der Figuren gegeben, eine Methode, welche gegenüber der darstellenden Geometrie deshalb als eine eigentlich geometrische bezeichnet werden

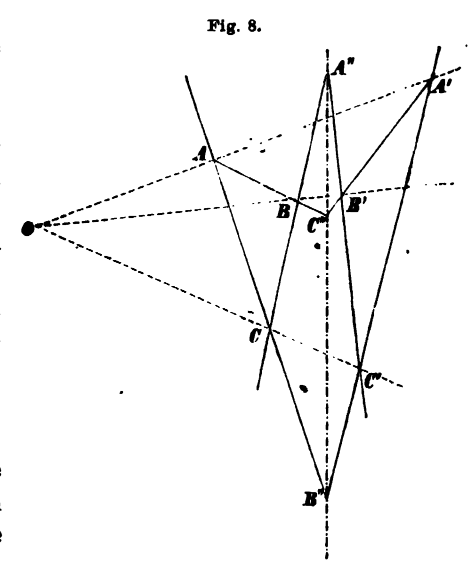
kann, weil sie sich nicht, wie die der orthogonalen Projectionen unmittelbar an die analytische Darstellung anlehnt; denn in der That ist die Darstellung räumlicher Formen durch Aufriss und Grundriss nichts anderes, als die geometrische Wiedergabe der Art und Weise, wie die analytische Geometrie durch Coordinaten eben jene Formen bestimmt. Ebenso, wie in der analytischen Geometrie die Coordinaten, so schieben sich in der descriptiven Geometrie deren Bilder, der Aufriss und Grundriss immer zwischen die an sich zu betrachtenden geometrischen Gebilde zu deren Vermittelung hinein. Poncelet's Methode operirt dagegen mit den Objecten selbst ohne jene Mittelglieder, und so ist es begreiflich, wie gerade die Methode der Projectionen auf einen solchen Reichthum von Sätzen führen konnte, welche die analytische Geometrie auf ihrem bisherigen Wege kaum jemals entdeckt hätte.

Es ist indessen nicht diese Methode der Projectionen allein, durch welche Poncelet sich in der Geschichte der Wissenschaften unsterblich gemacht, es sind noch zwei andere fundamentale Lehren, die er zuerst ausgebildet hat.

Die eine von diesen ist die Lehre von den homologen Figuren. Homolog oder entsprechend nannte Poncelet zwei Punkte A, A' unserer beiden früheren Ebenen, wenn sie Projectionen von einander sind; zu jeder Figur in der einen Ebene gibt es eine homologe in der anderen. Denken wir uns aber die eine der Ebenen E, E' um ihren Durchschnitt s so weit gedreht, bis beide zusammenfallen, so erhalten wir zwei homologe Figuren in Einer Ebene, und zwar in homologer Lage; je zwei entsprechende Gerade werden sich jedesmal auf der Linie s, die man nun die Axe der Homologie nennt, schneiden. In der ursprünglichen Lage beider Ebenen gegen einander gingen alle Verbindungslinien entsprechender Punkte durch den Augenpunkt. Es lässt sich nun zeigen, dass, wenn die Ebenen E, E' um ihren Durchschnitt s sich drehen, die homologen Figuren stets in perspectivischer Lage bleiben, und dass selbst, wenn sie endlich zusammenfallen, noch alle Verbindungslinien homologer Punkte durch einen Punkt O, das Centrum der Homologie hindurchgehen.

So erhalten wir eine höchst merkwürdige Beziehung zweier ebenen Figuren zu einander, welche es stets möglich macht, die eine aus der anderen mit Hilfe des Lineales allein zu construiren, wenn das Centrum und die Axe der Homologie gegeben sind. Construirt man so zu einem gegebenen Dreiecke *ABC* das entsprechende, indem man zunächst *A'* beliebig auf *OA* annimmt, so ist alles folgende bestimmt. Die Figur aber, die wir so erhalten, kann uns, wenn wir ihre Entstehung etwas anders auffassen, sogleich die beiden zusammengehörigen Sätze liefern:

Fig. 8.



Wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier Dreiecke sich in einem Punkte schneiden, so liegen die drei Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten der Dreiecke auf einer Geraden.

Wenn die Durchschnitte entsprechender Seiten zweier Dreiseite auf einer Geraden liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken der Dreiseite in einem Punkte.

Das sind die berühmten, bereits von Desargues aufgestellten und nach ihm benannten Sätze, deren einer die logische Umkehrung des anderen ist. Sie sind die erste Folgerung aus Poncelet's Homologie der Figuren, die eines der wichtigsten Principien der neueren Geometrie geworden ist.

Die Einführung noch eines anderen, hiemit verwandten Principes hat man ebenfalls Poncelet zu verdanken, wenn auch vor ihm schon vereinzelte Anwendungen desselben

(z. B. von Brianchon) gemacht waren. Die Homologie kann als eine Methode angesehen werden, um auf eine eigenthümliche Weise (nämlich durch Projection) eine Figur in eine andere zu transformiren, bei welcher die Art derselben nicht geändert wird, einem Punkte wieder ein Punkt, einer Geraden wieder eine Gerade entspricht. Es gibt nun aber auch solche Transformationen, bei denen sich die Art der Figuren verändert.

Schon De la Hire hatte (Sectiones conicae 1685) die merkwürdige Entdeckung gemacht, dass in der Ebene eines Kegelschnittes jedem Punkte eine Gerade (Polare) und jeder Geraden ein Punkt (Pol) in der Weise entspricht, dass die Polaren aller Punkte einer Geraden durch einen Punkt, nämlich den Pol dieser Geraden hindurchgehen, und umgekehrt die Pole aller Geraden, die durch einen Punkt gehen, auf einer Geraden, der Polare jenes Punktes, liegen.

Wenn nun in der Ebene eines Kegelschnittes ein Vieleck $ABCD\ldots$ gegeben ist, und man construirt zu allen diesen Punkten die Polaren $a, b, c, d, \ldots$ so bilden diese ein Vielseit und der Durchschnitt der beiden Polaren a, b ist hienach nichts anderes als der Pol der Verbindungslinie AB. Wir erhalten also so eine neue Figur, deren Ecken (Punkte) den Seiten (Geraden) der anderen und umgekehrt entsprechen. Jede Eigenschaft, welche von der ursprünglichen Figur gilt, wird in einer eigenthümlichen Umgestaltung auch an der neuen Figur wiederkehren. Solchen Punkten, welche in der ersten Figur auf einer Geraden liegen, werden Gerade entsprechen, die sich in einem Punkte schneiden, und umgekehrt.

Poncelet bediente sich nun dieser Transformation einer Figur in ihre polar reciproke planmässig als Methode zur Auffindung neuer Sätze aus bekannten. Jedem Satze der Geometrie entspricht in dieser Weise ein anderer polarer und die ganze Geometrie zerfällt so in eine Reihe parallel neben einander herlaufender, oft in einander übergreifender Wahrheiten. Gergonne, ein eifriger Geometer jener Zeit, der namentlich durch die Herausgabe seiner Annales de mathématiques 1810—1831 ein wesentliches Verdienst um den schnellen Fortschritt der Geometrie sich erworben hat,

ging in dieser Beziehung noch einen Schritt weiter; er erkannte, dass dieser Parallelismus nicht nur eine zufällige Folge jener Eigenschaft der Kegelschnitte, sondern vielmehr ein fundamentales Princip sei, welches er das der Dualität nannte. Der Geometrie, wie sie gewöhnlich entwickelt wird, in welcher eine Gerade durch Bewegung eines Punktes erzeugt gedacht wird, steht eine andere gleichberechtigt gegenüber, bei welcher ein Punkt durch eine sich drehende Gerade erzeugt wird. Während im ersten Falle die Gerade der geometrische Ort des fortschreitenden Punktes ist, so ist im letzteren der Punkt der geometrische Durchschnitt der sich drehenden Geraden.

In dieser Allgemeinheit ist denn auch die Dualität als Princip in die neuere Geometrie aufgenommen worden.

In den Jahren, welche dem Erscheinen von Poncelet's Traité unmittelbar folgten, während welcher Poncelet selbst und viele andere Geometer Frankreichs an der Weiterführung der neugeborenen Wissenschaft arbeiteten, begann auch in Deutschland die Epoche eifriger und erfolgreicher geometrischer Studien. Möbius, Plücker, Steiner sind die glänzenden Namen, die uns da zuerst entgegentreten. Was die beiden ersten betrifft, so kann ihre gänzliche Unabhängigkeit von Poncelet mit Sicherheit behauptet werden; Möbius hat bereits im Jahre 1823 die ersten Mittheilungen über seine geometrischen Studien gemacht, in denen man alle Hauptgedanken seines späteren, grösseren Werkes angedeutet findet; Plücker's Arbeiten gehen bis zum Jahre 1826 zurück und er bezeugt ausdrücklich (Vorrede zu Anal. geom. Entw. Bd. II.), dass ihm Poncelet's grosses Werk bei der Ausarbeitung seiner ersten grösseren Schrift unbekannt gewesen und dass er zu seinen Forschungen wesentlich durch Vorträge über Biot's analytische Geometrie angeregt worden sei.

Der Anfang der 20er Jahre unseres Jahrh. ist überhaupt die Epoche, von der die neue mathematische Blüthe Deutschlands datirt. Vor dieser Zeit finden wir in unserem Vaterlande ausser dem einzigen Gauss, der seinen Weg auf erhabener Höhe einsam wandelte, kaum einen nennenswerthen Mathematiker. Die Schriften und Methoden Euler's

nahmen noch immer den ersten Rang ein, und die grossen Leistungen der französischen Mathematiker blieben fast unbeachtet. Da beginnt mit einem Male eine ganz andere Luft zu wehen; eine Reihe der bedeutendsten Talente treten plötzlich auf allen Gebieten der Mathematik hervor, bemächtigen sich mit Leichtigkeit des gesammten vorhandenen Materiales, um auf diesem mit überraschender Schnelligkeit die herrlichsten Gebäude zu errichten. Will man als Epoche der Wiedergeburt der Mathematik in Deutschland ein bestimmtes Jahr ansetzen, so mag man das Jahr 1826 nennen, in dem durch die eifrigen Bemühungen Crelle's das erste mathematische Journal in Deutschland gegründet wurde, das all diesen neuen Bestrebungen offen stand und bald das erste der Welt wurde.

Möbius' „niemals genug zu bewunderndes" Hauptwerk „der barycentrische Calcul" 1826 führt seinen Namen von der eigenthümlichen Methode, mittels deren er die Lage jedes Punktes in einer Ebene auf drei Fundamentalpunkte bezog, indem er jeden Punkt ansah als Schwerpunkt der drei mit Gewichten belasteten Fundamentalpunkte. Die Grössen dieser drei Gewichte vertraten ihm die Stelle der gewöhnlichen Cartesischen Coordinaten. Der Begriff der Coordinaten trat hier zum ersten Male in einer neuen Gestalt hervor, die bald zu einer überhaupt allgemeineren Auffassung dieses Begriffes führte. Die barycentrischen Coordinaten waren das erste Beispiel von homogenen Coordinaten, wie sie heute in der analytischen Geometrie durchaus eingeführt sind; und schon bei Möbius treten die Vortheile ihrer Anwendung, die Symmetrie und Eleganz der Formeln hervor. Eben infolge dieser Eigenschaften seiner Coordinaten gelang es Möbius eine Reihe der schönsten geometrischen Theoreme rechnend zu entdecken, was bis dahin, wenn ich von den auf die Differentialverhältnisse der Curven bezüglichen Sätzen absehe, in der Geschichte der analytischen Geometrie fast unerhört war, und die Vortheile der neuen Methoden in klares Licht setzte. Wenn auch nicht wenige der von Möbius so aufgefundenen Sätze schon in den vorhergehenden Jahrhunderten aufgestellt, aber seitdem fast ganz verschollen waren, so ist doch sein

Verdienst um nichts geringer; denn er verleibte diese Theoreme der Wissenschaft ein, der sie niemals wieder verloren gehen werden. Diese Sätze betreffen zum grössten Theile metrische Verhältnisse, aber solche, welche nicht von den Grössen- und Winkelverhältnissen der Figuren, vom Winkelmaass und Magister Matheseos, wie es Möbius (1823) selbst ausdrückt, sondern ausschliesslich von deren descriptiven, d. h. nur auf die Lage bezüglichen Constructionsverhältnissen abhängen, d. h. solche, welche, mit Poncelet zu reden, projectivisch sind. Dahin gehören namentlich die Relationen zwischen den Doppelschnitt- und den Dreiecksschnittverhältnissen.

Wenn Möbius diese Sätze auch ursprünglich durch Rechnung entdeckte, so liess er es sich doch angelegen sein, dieselben rein geometrisch zu begründen, wie denn dieser Gelehrte überhaupt mehr eine geometrische, als eine analytische Anlage hatte. Dem geometrischen Ausdruck jener Theoreme aber gab er zuerst jene allgemeine, von jeder zufälligen Lage unabhängige Form, wie sie seitdem der Wissenschaft unentbehrlich geworden ist, indem er zuerst sich des Principes bediente, durch AB und BA dieselbe Strecke, aber in entgegengesetztem Sinn durchlaufen darzustellen und $AB = -BA$ oder $AB + BA = o$ zu setzen. Sind eine Anzahl Punkte auf einer Geraden gegeben, und liegen dieselben wirklich gezeichnet vor, so zeigt die Reihenfolge der Buchstaben sofort, welche Strecken in demselben und welche in entgegengesetztem Sinne (Zeichen) zu nehmen sind; die Relationen aber, welche zwischen diesen Strecken bestehen, nehmen bei dieser Bezeichnung eine und dieselbe, für alle Fälle gültige Form an, wie z. B.

$$AB + BC + CA = o.$$

Es wurde durch dies von Möbius mit Umsicht und Consequenz durchgeführte Princip der Zeichen nicht allein der Ausdruck metrischer Relationen zu einer bisher unbekannten Eleganz erhoben, nicht allein das lästige Princip der „correlaten Positionen“ Carnot's, welches immer einer bestimmten Voraussetzung über die Positionsverhältnisse an einer ursprünglichen Figur bedurfte, ganz beseitigt, sondern

die Natur der Grössenbeziehungen überhaupt in ein neues Licht gesetzt; die Trigonometrie selbst ist erst durch dies Princip wissenschaftlich vollständig begründet worden.

Man verdankt Möbius auch die Aufstellung und Verwerthung des allgemeinen Begriffes der geometrischen Verwandtschaft. Verwandt heissen zwei räumliche Gebilde, wenn jedem Elemente des einen ein oder mehrere Elemente des anderen in gesetzmässiger Weise entsprechen. Dabei können sich entweder gleichartige oder ungleichartige Elemente entsprechen; bei zwei zu einander reciprok polaren Figuren findet z. B. letzteres, bei den homologen Figuren Poncelet's das erstere statt. Es können ferner einem Elemente des einen Systemes entweder nur ein oder mehrere Elemente des anderen entsprechen: „eindeutige oder mehrdeutige Verwandtschaft".

Die eindeutige Verwandtschaft, bei der einem Punkte des einen Gebildes nur ein Punkt des anderen und umgekehrt entspricht, ist die der homologen Figuren, die Möbius, unbekannt mit Poncelet's Vorarbeiten, selbstständig entdeckte und collineare nannte. Seine Auffassung aber ist eine viel allgemeinere, als die Poncelet's; denn er betrachtet nicht nur collineare Figuren in einer Ebene, er sieht vielmehr die Ebene selbst (deren Punkte) als collineare Gebilde an. Er untersuchte dann, wie sich zwei collineare Ebenen verhalten, wenn sie in beliebiger Lage aufeinander gelegt werden, bestimmte ihre zusammenfallenden (identischen) Punkte. So fand er seinerseits die perspectivische Lage zweier collinearer Ebenen.

Ebenso kann man zwei collineare Punktreihen, die auf Geraden liegen, miteinander vergleichen, wenn die Geraden sich schneiden, oder wenn sie zusammenfallen. Ja Möbius construirte sogar zu dem nach drei Dimensionen ausgedehnten Raume sein collineares Abbild, das wieder ein Raum von drei Dimensionen ist, der nun freilich, weil es nur Einen Raum gibt, in seiner Totalität mit dem ersten zusammenfällt, jedoch im Begriffe von diesem unterschieden werden kann.

Wird noch eine Bedingung hinzugefügt, so gehen die homologen Figuren in ähnliche, und bei noch weiterer

Beschränkung in gleiche und ähnliche über. Auch diese Verwandtschaften hat Möbius des Weiteren untersucht.*)

Nur zwei Jahre nach Möbius' barycentrischem Calcul und von ihm ganz unabhängig, erschienen 1828 die „analytisch-geometrischen Entwickelungen" J. Plücker's, von denen eine neue Epoche der analytischen Geometrie beginnt. Er selbst bezeichnet seine Methode als eine rein analytische und charakterisirt sie folgendermassen: „In jeder Gleichung zwischen Coordinaten seh' ich einen geometrischen Ort, in dem Systeme zweier solcher Gleichungen die Durchschnitte zweier Oerter, und endlich und hauptsächlich in jeder dritten Gleichung, die eine algebraische Folge zweier gegebener ist, einen neuen geometrischen Ort, der die Durchschnitte der durch die beiden gegebenen Gleichungen dargestellten Oerter enthält, und dessen Natur von der Form der resultirenden Gleichung abhängt. Fast überall genügt es, die Verbindung durch einen unbestimmten Coefficienten bloss anzudeuten; ja sogar, wenn man die Form der Gleichungen einmal kennt, auch diese durch ein blosses Symbol zu bezeichnen." Indem er so die Methode der symbolischen Bezeichnung (gleichzeitig von Bobillier erfunden) und der unbestimmten Coefficienten schuf, auf welcher die ganze neuere analytische Geometrie beruht, entledigte er diese Wissenschaft der steten Beziehung auf die Coordinatenaxen, welche sich bisher immer, gleichsam wie ein fremdes Element, zwischen die der Betrachtung unterliegenden Linien und Figuren eingeschoben hatte. Man konnte mittels dieser eigenthümlichen Methode mit den Linien selbst rechnen; die Combination ihrer Symbole führte ohne alle die lästigen Eliminationen, wie sie bis dahin unvermeidlich waren, von selbst zu ihren geometrischen Relationen, die sich einfach aus den Gleichungen ablesen liessen. Die analytische Geometrie konnte erst jetzt, wie es die sogenannte synthetische Geometrie immer gethan hat, mit den Gebilden selbst operiren, und es standen von nun

---

*) Die Untersuchungen von Möbius sind in den „Grundlinien der neueren Geometrie" von Witzschel 1858, soweit sie synthetischer Art sind, grossentheils zusammengestellt.

an ihre Leistungen im rein geometrischen Gebiete nicht mehr hinter denen der synthetischen Geometrie zurück; ja für den Augenblick überholten sie sogar die der letzteren.*)

Dies sollte indess nur kurze Zeit dauern; denn im Jahre 1832 erschien die „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten" von Jacob Steiner, dem grössten geometrischen Genie, welches seit den Zeiten eines Apollonius aufgetreten ist. In dieser Schrift findet man diejenigen Fundamentaleigenschaften bezeichnet, „die den Keim aller Sätze, Porismen und Aufgaben der Geometrie, womit uns die ältere und neuere Zeit so freigebig beschenkt hat, in sich enthalten. Für dies Heer von auseinandergerissenen Eigenthümlichkeiten musste sich ein leitender Faden und eine gemeinsame Wurzel auffinden lassen. . ." In der That hat Steiner's Schrift „den Organismus aufgedeckt, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind. Es gibt eine geringe Zahl von ganz einfachen Fundamentalbeziehungen, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen folgerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt. Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen. Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften verleihen zu können" — mit diesen begeisterten Worten schildert Steiner selbst das hohe Ziel, das er erreicht hatte.

In dem schönen Satze, dass ein Kegelschnitt durch den Durchschnitt zweier collinearer (projectivischer) Büschel erzeugt werden kann und dem dazu dualen erkannte er das

---

*) Das Nähere siehe: Clebsch, Zum Gedächtniss an Plücker. Abhandlungen d. k. Gesellschaft d. Wiss. z. Göttingen. Bd. 15. 1872.

Fundamentalprincip, aus dem sich alle die unzähligen, bisher oft so wundersamen Eigenschaften dieser merkwürdigen Curven, wie von selbst, mit spielender Leichtigkeit ergeben. Es bedarf nur der Combination der einfachsten Sätze, nur einer lebendigen geometrischen Phantasie, welche dieselbe Figur auf die verschiedenste Weise aufzufassen vermag, um die Anzahl der Eigenschaften dieser Curven in's Unbegrenzte zu vermehren.*)

Mit Steiner's Werk ist die Lehre von den Kegelschnitten und den im Raume entsprechenden Gebilden, den Flächen II. Ordnung, sammt den hiezu gehörigen Theorieen im Wesentlichen abgeschlossen; was seitdem noch in dieser Beziehung geleistet worden ist, beschränkt sich auf weitere Durcharbeitung, grössere formelle Vollendung.

Mit Steiner aber beginnt die zweite Periode der neueren Geometrie. Nachdem die Lehre von den Curven und Flächen II. Ordnung erledigt war, wandte man sich den höheren algebraischen Curven und Flächen zu. Steiner auf synthetischem und Plücker auf analytischem Wege begründeten diese Epoche, in deren Mitte wir jetzt stehen. [Plücker, Theorie d. algebraischen Curven, 1839. Steiner's grosse Abhandlung im 47. Bde. von Crelle's Journal 1846: „Ueber solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben."]

Es kann jedoch in keiner Weise meine Absicht sein, diese zweite Periode und diese neueste Richtung näher schildern zu wollen; denn sie liegt ausserhalb der Grenzen, die uns für diese Einleitung nothwendig gesteckt sind. Es werden im Wesentlichen die Resultate der ersten mit Steiner's „Systematischen Entwickelung" abschliessenden Periode sein, mit denen wir uns im Folgenden zu beschäftigen haben. Wir könnten somit diese historischen Vorbemerkungen beschliessen, wenn wir nicht noch zweier Männer gedenken müssten, welche auf diesem Gebiete nach dem Jahre 1832 in hervorragender Weise thätig gewesen sind; ich meine Chasles und v. Staudt.

---

*) Vergl. auch Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, Bd. I, hrsg. v. Geiser, Bd. II, v. Schröter. (Leipzig 1867.)

Der erstere, Michel Chasles, begründete seinen Ruhm durch sein Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie im Jahre 1837, in dem er in zwar nicht überall historisch gewissenhafter, aber höchst geistvoller Weise die Leistungen der Geometer des Alterthums und der neueren Zeit bis auf Poncelet behandelt und in begeisterter Darstellung die Vorzüge rein geometrischer Untersuchungen gegenüber den analytischen hervorhebt. In einer grossen Anzahl von Noten gibt er eine reiche Fülle der schönsten Anwendungen älterer und neuerer Methoden und entwickelt in ihnen, sowie in der begleitenden grossen Abhandlung: Sur deux principes généraux de la science, la Dualité et l'Homographie selbst Methoden, aus denen er mit bewundernswerther Gewandtheit einen unglaublichen Reichthum der elegantesten Sätze mit Leichtigkeit gewinnt. Freilich sind die Methoden, die er als neue entwickelt, nicht immer neu und ganz sein eigen, sondern finden sich theils bei Möbius, theils bei Steiner schon vor, wie die consequente Berücksichtigung des Sinnes einer Strecke, die Einführung des Doppelverhältnisses, welches er das anharmonische nannte (*ἀνα-ἁρμονική* nicht *ἀ-ν-ἁρμονική*) als eines fundamentalen, die allgemeine Begründung der reciproken und der collinearen Verwandtschaft (Dualité et Homographie); es war aber in jener Zeit die Entwickelung der Geometrie eine so rasche, die Verbreitung der neuen Literatur aber eine verhältnissmässig so langsame, die neuen fruchtbaren Ideen lagen so in der Luft, und entwickelten sich mit solcher Nothwendigkeit gleichartig in den Köpfen aller productiven Geometer, dass wir sie fast immer an verschiedenen Orten und unabhängig von einander auftreten sehen. Befremdend erscheint es freilich, dass Chasles in seinen späteren Schriften, selbst in seinem neuesten grossen Werke: Rapport sur le progrès de la Géométrie, 1870, in dem er seine Leistungen eingehend bespricht, mit keinem Worte die unzweifelhafte Priorität der Deutschen anerkennt. Dem gegenüber müssen wir freilich zugeben, dass seine obengenannte Schrift auch in Deutschland fast mehr als irgend eine andere zum Fortschritte der neueren Geometrie insofern beigetragen hat, als sie durch Lebendigkeit des

Vortrages, glänzende Schlaglichter und geistreiche Skizzirung der wichtigsten Theorieen den bisher sehr kleinen Kreis der Freunde der Geometrie bedeutend erweiterte.

Das spätere umfassende Lehrbuch von Chasles „Traité de géométrie supérieure, 1852“, sowie sein „Traité des sections coniques, première partie 1865“ hat trotz des interessanten Inhaltes bei uns wenigstens nicht soviel Erfolg gehabt, als sein Aperçu, wie denn überhaupt die späteren Leistungen des französischen Geometers nicht mehr dieselbe Productivität zeigen und weit hinter dem zurückgeblieben sind, was unterdess in Deutschland auf denselben Gebieten geleistet worden war.

Hier haben wir ausser den schon oben erwähnten Geometern noch den Erlanger Professor v. Staudt zu nennen. Seine kleine „Geometrie der Lage“ 1847 ist ein klassisches Meisterwerk, dessen Anerkennung und Verbreitung durch die grosse Kürze des Vortrages, durch den Mangel aller erläuternden Zusätze und durch den äusserst abstracten Charakter seiner Methode sich leider so sehr verzögerte, dass der 1867 verstorbene Verfasser die eigentliche Periode seines Ruhmes nicht mehr erlebt hat. Im Gegensatze zu allen seinen Vorgängern, namentlich zu Chasles, der sein Traité de géom. supér. wesentlich auf das Doppelverhältniss gegründet hat und fortwährenden Gebrauch von metrischen Verhältnissen und damit der Rechnung macht, hat sich v. Staudt in seinem Werkchen die Aufgabe gestellt, „die Geometrie der Lage zu einer selbstständigen Wissenschaft zu machen, welche des Messens nicht bedarf“ (Vorwort), d. h. die fundamentalen Theorieen der neueren Geometrie ohne alle Betrachtung von metrischen Relationen, rein auf solche der Lagenverhältnisse zu gründen, und somit auch alle Sätze, welche nicht unmittelbar Eigenschaften der Grösse aussagen, durchaus mittels der Geometrie der Lage zu beweisen. Vergleichen wir seine Darstellung z. B. mit der Steiner's, der fast alle Theorieen, selbst wo sie sich wesentlich auf die Lage beziehen, doch mittels metrischer Relationen beweist, dann aber, nachdem er das Fundament gelegt, die Methode wechselt und rein mit der Lage operirt — so leuchtet ein, dass die Methode

v. Staudt's den Vorzug grösserer systematischer Einheit, grösserer Sauberkeit und Eleganz hat. Was man mit derselben auch für die Weiterförderung der Wissenschaft leisten könne, hat ihr Urheber in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage" 1856—1860 gezeigt, und doch ist nicht zu läugnen, dass sie eine gewisse Einseitigkeit besitzt, die sich selbst rächt. Wo sich in der Natur oder in unserem Geiste an einem und demselben Objecte verschiedene, von einander untrennbare Eigenschaften, verschiedene sich einander bedingende Begriffe gleichzeitig vorfinden, da wird nur diejenige Analyse des Objectes naturgemäss und eben deshalb wahrhaft förderlich sein, welche diesen Zusammenhang des Verschiedenen stets im Auge behält und das natürlich eng Verbundene nicht zerreisst. Wo dies nicht geschieht, wo man nur Eine Seite des Objectes isolirt von allen anderen consequent verfolgt, da wird man immer zu künstlichen Systemen, in denen es nur ihrem Urheber wohl wird, und zu spitzfindigen Abstractionen gelangen, die in einer Zeit gesunder Entwickelung sich niemals lange in der Wissenschaft halten werden. Dass das Werk v. Staudt's mehr oder minder an diesen Fehlern leidet, und dass diese eben seinen langsamen Erfolg erklären, kann wohl kaum bezweifelt werden; auch hat neuerdings Reye in seiner empfehlenswerthen „Geometrie der Lage" in 2 Theilen, 1866—68, obgleich er sich im Wesentlichen jenen Methoden v. Staudt's anschliesst, doch ihre Einseitigkeiten soviel wie möglich zu vermeiden gesucht.

Es ist eben dies in seiner Eigenthümlichkeit klassische Werk v. Staudt's einer jener Versuche, die mannigfaltige Natur mit den tausendfach hinüber und herüber gehenden Fäden in einen abstracten Schematismus und ein künstliches System zu zwängen, — ein Versuch, wie er eben nur in unserem Vaterlande, dem Lande streng geschulter Methode und — so dürfen wir hinzufügen — wissenschaftlicher Pedanterie möglich ist. Der Franzose leistet sicherlich in den exacten Wissenschaften nicht weniger als der Deutsche, aber er nimmt die Hilfsmittel, wo er sie findet; er opfert nicht die Anschaulichkeit der Systematik auf, und gibt nicht die Leichtigkeit für die Reinheit der Methode

preis. Da in dem stillen Erlangen konnte wohl v. Staudt für sich und in sich abgeschlossen sein wissenschaftliches System. entwickeln, das er nur hie und da einmal ein oder zwei Zuhörern an seinem Schreibtische entwickelte; dort aber in Paris in lebendigem Verkehr mit Collegen und zahlreichen Zuhörern wäre die Ausarbeitung des Systemes unmöglich gewesen.

Ich bin am Ende meiner historischen Einleitung angelangt, die mich der Verpflichtung überhebt, die Wissenschaft, die man nun seit etwa 40 Jahren als „neuere Geometrie" zu bezeichnen pflegt, thetisch zu definiren. Denn es ist immer eine missliche und undankbare Sache, eine ganze Wissenschaft mit all ihrem Reichthume des Inhalts und der Methode in ein paar Worten zu kennzeichnen; ihre historische Entwickelung, wie ich sie vorgeführt habe, legt am besten ihren Ursprung, ihr Wesen und ihre Ziele klar.

Von der sogenannten analytischen Geometrie unterscheidet sich diese neuere Geometrie wesentlich dadurch, dass sie mit den geometrischen Gebilden selbst und nicht mit deren algebraischen Gleichungen operirt, dass sie deren Eigenschaften durch räumliche Constructionen entdeckt und beweist, nicht aber durch algebraische Verbindung ihrer Symbole. Und doch, so verschiedenartig auch zunächst die Methoden zu sein scheinen — sie stehen in der allerengsten Verbindung miteinander, und je weiter beide Wissenschaften fortgeschritten sind, um so näher sind sie sich gerückt, so nahe, dass es nicht selten nur einer geringen Modification der Ausdrucksweise bedarf, um das Raisonnement der einen Wissenschaft in die andere zu übertragen.

Viel beträchtlicher unterscheidet sich nach Inhalt und Form die neuere Geometrie von der antiken, obgleich sie mit derselben den Charakter der Anschaulichkeit und des unmittelbaren Operirens an den Gebilden gemein hat.

Was zunächst den Inhalt betrifft, so ist die antike Geometrie, wenigstens in dem Theile derselben, den man gewöhnlich allein kennt, wesentlich auf den pythagorischen Lehrsatz und den Satz von der Summe der Winkel im Dreieck gegründet; mit wenigen Ausnahmen beziehen sich ihre Theoreme auf Strecken- und Winkelverhältnisse, und

bedienen sich ihre Constructionen des Kreises. Die neuere Geometrie macht von dem pythagorischen Lehrsatz keinen Gebrauch, ihre Sätze beziehen sich auf Lageverhältnisse und solche metrische Relationen, welche allein von diesen abhängen, nicht aber zu ihrer Construction des Kreises bedürfen. Die antike Geometrie construirt mit Cirkel und Lineal, die neuere mit dem Lineal. Die alte Geometrie beschränkt sich auf die Auffindung solcher Eigenschaften geometrischer Gebilde, welche nur bei congruenten oder ähnlichen Figuren unverändert bleiben, die neuere Geometrie hat es mit solchen Eigenschaften zu thun, welche sich bei der Projection nicht ändern.*)

Man könnte daher die neuere Geometrie auch ganz passend die „Geometrie der Lage“ nennen, wie dies schon vielfach geschehen ist, oder auch „projectivische Geometrie“. Dagegen hat es seine Bedenken, sie im Gegensatze zur analytischen Geometrie als synthetische zu bezeichnen, wenigstens dann, wenn man die eigentliche Bedeutung dieser Wörter, wie sie die griechischen Mathematiker und Logiker festgestellt haben, einigermassen erhalten will. Der Unterschied, wie ihn Plato ursprünglich zwischen synthetischer und analytischer Methode machte, existirt heute, ausser in den Lehrbüchern der alten Elementargeometrie, überhaupt nicht mehr; sämmtliche Disciplinen der Mathematik bedienen sich beider Methoden fortwährend nebeneinander. Später ist es namentlich durch die Philosophen aufgekommen, als synthetische Methode den vom Einzelnen Schritt vor Schritt zum Allgemeineren aufsteigenden Gang, als analytische umgekehrt die Entwickelung des Einzelnen aus allgemeinen Principien zu bezeichnen. In diesem Sinne ist die neuere Geometrie nicht weniger analytisch in ihrer Methode, als die sogenannte analytische, d. h. die Coordinatengeometrie. In der Mathematik ist es seit dem XVI. Jahrh. üblich geworden, unter Analysis überhaupt alle Theile der Wissenschaft, welche sich der Rechnung mit Formeln bedienen, dann speciell die Dis-

*) Es versteht sich, dass diese Gegenüberstellungen nur im Wesentlichen gelten.

ciplin zu verstehen, welche sich mit den veränderlichen Grössen beschäftigt, und Synthesis dann die Methode der Geometrie zu nennen, welche die Gebilde selbst construirt. Wollen wir in diesem Sinne das Beiwort „synthetisch“ auf die neuere Geometrie anwenden, so mag dies geschehen; vorzuziehen wäre aber die Bezeichnung „constructive Geometrie“.

Ich darf vielleicht unsere Disciplin noch anders charakterisiren: Euklid hat einst seinem Könige Ptolemäus, der, wie ich begreife, das mühsame Studium der „Elemente“ abschreckend fand, mit dem ganzen Stolze eines Gelehrten erwidert: „Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik“. — In einem höhern Sinne des Wortes ist die neuere Geometrie dieser Königsweg!

Erster Abschnitt.

Theorie des Doppelverhältnisses und der Transversalen.

§. 1.

Princip der Zeichen. Definition des Doppelverhältnisses.

Bezeichnet man mit AB eine geradlinige Strecke, deren Endpunkte A und B sind, so soll damit nicht nur die Länge des zwischen A und B gelegenen Stückes, sondern zugleich auch die Richtung — auf directem Wege von A nach B — gekennzeichnet werden, nach welcher die Strecke erzeugt gedacht wird; unter dem Symbol BA ist alsdann die entgegengesetzte Richtung — von B zu A hin — zu verstehen. Wird also festgesetzt, dass dem Sinne nach entgegengesetzte Strecken auch entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, so besteht die Gleichung:

1) $$AB + BA = 0.$$

Für die durch drei Punkte A, B, C auf einer Geraden gebildeten Abschnitte erhält man in gleicher Weise:

2) $$AB + BC + CA = 0.$$

Aus diesen beiden fundamentalen Relationen lässt sich sodann leicht eine grosse Anzahl von Beziehungen zwischen den Strecken, welche auf einer Geraden liegen, ableiten: Sind A, B, C, D z. B. vier Punkte auf einer Geraden, so ist:

3) $$AB . CD + BC . AD + CA . BD = 0.$$

Denn man hat:

$$AB = AD + DB \qquad AB . CD = AD . CD + DB . CD$$
$$BC = BD + DC \qquad BC . AD = BD . AD + DC . AD$$
$$CA = CD + DA \qquad CA . BD = CD . BD + DA . BD$$

und daher durch Addition letzterer Gleichungen die verlangte Relation. Durch Multiplication der linker Hand stehenden Gleichungen gewinnt man die neue:

4) $AB.BC.CA = AC.\overline{BD}^2 + BA.\overline{CD}^2 + CB.\overline{AD}^2$,
ein Satz, der auch in der Form:

5) $$\frac{\overline{AD}^2}{AB.AC} + \frac{\overline{BD}^2}{BC.BA} + \frac{\overline{CD}^2}{CA.CB} = 1$$

geschrieben werden kann. Aus diesen Gleichungen, welche symmetrisch in A, B, C, nicht aber in A, B, C, D sind, ergeben sich noch drei weitere gleichberechtigte Relationen, indem man in der Gleichung 4) die vier Elemente cyclisch vertauscht. Bildet man diese drei neuen Ausdrücke, so erhält man durch Addition, bezüglich Subtraction, für die auf der linken Seite stehenden Grössen:

6) $$AB.BC.CA - BC.CD.DB + CD.DA.AC - DA.AB.BD = 0,$$

eine Identität, die nunmehr nach allen Grössen symmetrisch aufgebaut ist.

Diese Unterscheidung der Richtung einer Strecke kommt bei der Theilung einer gegebenen Strecke zu principieller Verwerthung, wenn die Theile derselben in Verhältniss zu einander gesetzt werden.

Man versteht unter dem Verhältnisse, nach welchem die Strecke AB vom Punkte C getheilt ist, den Quotienten $\frac{AC}{CB}$. — Liegt der Punkt C im Punkte A, so ist das Theilverhältniss gleich Null, bewegt sich der Punkt C von A nach B hin, so wächst dasselbe, indem es positive Werthe erhält, da AC und CB in gleicher Richtung zu nehmen sind. Sobald C in die Mitte der Strecke AB rückt, erlangt das Verhältniss den Werth $+1$ und wird, wenn C mit B zusammenfällt, gleich $+\infty$. Vom Punkte B in gleicher Richtung fortbewegt, liefert C nunmehr negative Verhältnisse, deren absolute Werthe immer abnehmen, bis für den sogenannten unendlich fernen Punkt der Geraden den Werth -1 erreicht ist. Der Punkt C erscheint nun, vom Punkte A aus gesehen, auf der anderen Seite und nähert sich demselben mehr und mehr, bis er schliesslich zur Anfangslage in A zurückkehrt. Die Theilverhältnisse durchlaufen während dieser Strecke alle zwischen -1 und 0 gelegenen negativen Werthe. Eine Strecke AB ist somit in einem positiven

Verhältnisse getheilt, wenn der Punkt C innerhalb der endlichen Strecke AB liegt, dagegen in einem negativen, wenn C ausserhalb dieses Abschnittes gelegen ist; zu jedem positiven oder negativen Verhältnisswerthe gehört eine und nur eine Lage des Punktes C.

Ist eine Strecke AB durch 2 Punkte C und D getheilt worden, so kann man die Theilverhältnisse $\frac{AC}{CB}$ und $\frac{AD}{DB}$ wiederum in ein neues Verhältniss zu einander setzen. Diesen Werth nennt man das Doppelverhältniss (anharmonische Function) der vier Punkte und bezeichnet ihn durch die Form:

$$7) \qquad (ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Untersuchen wir den Verlauf der Werthe dieses Doppelverhältnisses bei verschiedenen Lagen von C und D.

Zu dem Zwecke denke man sich den Punkt C fest und zwar zunächst zwischen den Punkten A und B gelegen, so dass der Werth von $\frac{AC}{CB}$ eine positive Grösse ist. Bewegt sich alsdann der Punkt D vom Orte A beginnend nach der durch ACB gekennzeichneten Richtung, so bekommt das Doppelverhältniss, so lange D zwischen den Grenzen A und C bleibt, in stetiger Folge abnehmend alle Werthe von $+\infty$ bis $+1$; vom Punkte C weiter bis zum Punkt B ergeben sich die zwischen $+1$ und 0 gelegenen Werthe, während bei weiterem Fortrücken von B die Werthe des Doppelverhältnisses negativ ausfallen; im sogenannten unendlich fernen Punkte erreicht dasselbe die Grösse $-\frac{AC}{CB}$, im Punkte A wiederum den Werth $\mp\infty$. Liegt aber der Punkt C ausserhalb des Abschnittes AB, ist also $\frac{AC}{CB}$ eine negative Grösse, so wird, wie eine entsprechende Betrachtung zeigt, der Werth des Doppelverhältnisses bei denjenigen Lagen des Punktes D, in denen es bisher positiv ward, negativ werden und umgekehrt. Das Doppelverhältniss $(ABCD)$ ist demnach positiv, wenn die Punkte C und D beide innerhalb oder beide ausserhalb der directen Strecke AB liegen

dagegen negativ, wenn einer der Punkte sich innerhalb, der andere ausserhalb dieser Strecke befindet.

Wir hielten bisher an der Anschauung fest, dass die Strecke AB durch die Punkte C und D getheilt wurde, können dieselbe indess, sobald vier Punkte auf einer Geraden gegeben sind, nach manchen Seiten hin erweitern. Denn zunächst ist unmittelbar einleuchtend, dass man ebenso berechtigt ist, die Abschnitte auf der Linie so aufzufassen, als sei die Strecke, welche durch zwei andere beliebig herausgegriffene Punkte begrenzt wird, z. B. BD, durch die übrigen Punkte, A und C, getheilt worden. Dem entsprechend wird man von einem Doppelverhältnisse, welches durch Theilung dieser Strecke entstanden ist, zu reden haben. Da nun durch vier Punkte auf einer Geraden sechs Abschnitte bestimmt werden (AB, AC, AD, BC, BD, CD), so lassen sich auch für das Doppelverhältniss sechs verschiedene Anordnungen treffen, je nachdem eine dieser Strecken zu Grunde gelegt wird. Jeder dieser Abschnitte kann weiter, wie oben erwähnt wurde, nach zwei entgegengesetzten Richtungen hin gerechnet werden, und ferner lässt sich bei der Theilung der Strecke AB das Verhältniss $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ ebenso wie das reciproke $\frac{AD}{DB} : \frac{AC}{CB}$ herausgreifen. Um alle diese Fälle zusammenzufassen, werden wir daher gut thun, die Vorstellung der Theilung eines bestimmten Abschnittes fallen zu lassen und zunächst unser Resultat dahin zusammenzufassen: Zwischen den Abschnitten, welche durch vier Punkte auf einer Geraden bestimmt werden, lassen sich 24 Doppelverhältnisse bilden, indem man immer eine unter den vorliegenden Strecken, in bestimmter Richtung genommen, als durch die anderen beiden Punkte getheilt betrachtet.

Es wird nun unsere nächste Aufgabe sein, zu untersuchen, in welchem Zusammenhange diese Werthe mit einander stehen; das Schema derselben erhält man aus der Form $(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$, wenn sämmtliche Permutationen der vier Elemente gebildet werden. Aus der Definition eines solchen Schema ist zunächst unmittelbar klar, dass:

8) $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$.

Denn es ist:

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{BD}{DA}:\frac{BC}{CA}=\frac{CA}{AD}:\frac{CB}{BD}=\frac{DB}{BC}:\frac{DA}{AC}.$$

Man wird im Ganzen **sechs** solcher Gleichungen zwischen je vier Doppelverhältnissen aufstellen, indem man den vorstehenden Gleichungen die allgemeine Regel entnimmt: Bei gleichzeitiger Vertauschung je zweier Elemente bleibt der Werth des Doppelverhältnisses ungeändert. — Man erhält ferner den reciproken Werth eines Doppelverhältnisses, wenn man zwei neben einander stehende Buchstaben unter sich vertauscht:

9) $$(ABCD)\,.\,(ABDC)=1,$$

weil $(ABDC)=\frac{AD}{DB}:\frac{AC}{CB}$.

Endlich fanden wir in Gleichung 3), dass:

$$CA\,.\,BD+AB\,.\,CD+BC\,.\,AD=0$$

also:

10) $$\frac{AC\,.\,DB}{CB\,.\,AD}+\frac{AB\,.\,DC}{BC\,.\,AD}=1$$

oder: $$(ABCD)+(ACBD)=1,$$

das heisst: Die Summe zweier Doppelverhältnisse, welche durch Vertauschung der mittleren oder der äusseren Elemente aus einander hervorgehen, ist die Einheit.

Mittels der beiden letzten Regeln kann man nun die Werthe des Doppelverhältnisses für alle möglichen 24 Fälle durch einen der Werthe, z. B. $(ABCD)=\varkappa$ darstellen. Es ist:

11)
$$(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA)=\varkappa$$
$$(ABDC)=(BACD)=(DCAB)=(CDBA)=\frac{1}{\varkappa}$$
$$(ACBD)=(CADB)=(BDAC)=(DBCA)=1-\varkappa$$
$$(ACDB)=(CABD)=(DBAC)=(BDCA)=\frac{1}{1-\varkappa}$$
$$(ADBC)=(DACB)=(BCAD)=(CBDA)=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}$$
$$(ADCB)=(DABC)=(CBAD)=(BCDA)=\frac{\varkappa}{\varkappa-1}.$$

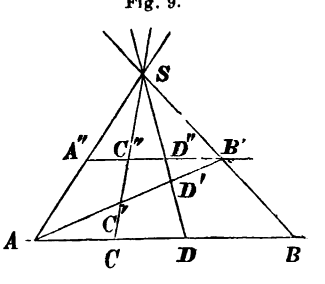
Im Folgenden werden diejenigen Punkte, welche durch neben einander stehende Buchstaben bezeichnet sind, einander

zugeordnete genannt werden. So sind z. B. im Doppelverhältniss $(BCDA)$ die Punkte B und C, sowie D und A einander zugeordnete.

§. 2.
Projectivische Eigenschaft des Doppelverhältnisses. Harmonische Elemente.

Verbindet man vier auf einer Geraden gelegene Punkte A, B, C, D, deren Doppelverhältniss $(ABCD) = \varkappa$, mit einem ausserhalb der Linie befindlichen Punkt S durch vier Gerade a, b, c, d, so schneiden diese Linien auf jeder anderen Geraden vier Punkte $A'B'C'D'$ aus, so zwar, dass deren Doppelverhältniss immer wiederum gleich $\varkappa$ ist. Um dieses zu erweisen, beachte man zunächst, dass das Doppelverhältniss bei paralleler Verschiebung jedenfalls constant bleibt; daher verschiebe man die Gerade $A'B'$ parallel mit sich selbst, bis A mit A' zusammenfällt und ziehe durch B' eine Gerade $A''C''D''$ parallel zu AB.

Fig. 9.



Dann ist:

$$\frac{AC}{C''B'} = \frac{AC'}{C'B'} \qquad \frac{AD}{D''B'} = \frac{AD'}{D'B'}$$

also:

$$\frac{AC'}{C'B'} : \frac{AD'}{D'B'} = \frac{AC}{C''B'} : \frac{AD}{D''B'} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \varkappa.$$

Projicirt man vier Punkte einer Geraden von einem beliebigen Punkte aus auf eine andere, so bleibt das Doppelverhältniss ungeändert. Ist diese zweite Transversale parallel einem der projicirenden Strahlen, etwa d, so rückt D' in unendliche Ferne und es wird $\frac{A'C'}{C'B'} = -\varkappa$. Das Doppelverhältniss geht dann in ein einfaches über.

Hier wie bereits im Vorhergehenden sind wir darauf geführt worden, von dem unendlich entfernten Punkt einer Geraden zu sprechen, eine Vorstellung, deren Be-

deutung späterhin noch klarer hervortreten wird. Ist eine feste Gerade und ein ausserhalb derselben befindlicher Punkt S gegeben, und denkt man sich eine um diesen Punkt bewegliche Linie, so wird letztere in ihren verschiedenen Lagen die ursprüngliche Gerade immer in einem bestimmten Punkte schneiden. Nur ein Mal tritt der besondere Fall ein, dass der bewegliche Strahl in parallele Lage zu der festen Geraden kommt, wobei ein zugehöriger Schnittpunkt im Endlichen nicht mehr angebbar ist. Indem man aber diese parallele Lage nicht als wesentlich verschieden von den übrigen, welche bei der Drehung geliefert werden, betrachtet, spricht man auch hier noch von einem Schnittpunkte und bezeichnet ihn als den unendlich fernen Punkt der Geraden oder der geradlinigen Punktreihe. Die Orte der Schnittpunkte unmittelbar vor und unmittelbar nach dieser parallelen Lage liegen auf entgegengesetzten Seiten sehr weit entfernt; und hieraus gewinnen wir die Auffassung eines stetigen Zusammenhanges aller Punkte auf einer Geraden (entsprechend der continuirlichen Drehung des Strahles im Punkte S).

Werden drei Punkte $A'B'C'$ einer Geraden, deren Verhältniss $\frac{A'C'}{C'B'}$ gleich $-\varkappa$ ist, zugleich mit ihrem unendlich entfernten Punkte D' auf eine andere projicirt, so erhält man vier entsprechende Punkte $ABCD$, so dass $(ABCD) = \varkappa$. Drei im Endlichen auf einer Geraden gelegene Punkte bestimmen also ein Doppelverhältniss, wenn der unendlich ferne Punkt hinzugenommen wird. $(A'B'C'\infty) = -\frac{A'C'}{C'B'}$.

Aus diesen Sätzen ergiebt sich eine einfache Construction, um zu drei gegebenen Punkten A, B, C den einem bestimmten Doppelverhältnisse $\varkappa$ entsprechenden vierten Punkt D zu finden. Man lege durch den Punkt C, welcher dem D zugeordnet werden soll, eine beliebige Transversale, trage auf dieser zwei Punkte A' und B' ab, so dass $A'C : CB' = -\varkappa$. Durch den Durchschnitt S der Geraden AA', BB' ziehe man sodann eine Transversale parallel der durch C gelegten Geraden, so wird diese die erste Gerade in dem gesuchten Punkte D schneiden.

Ein besonders wichtiges unter den Doppelverhältnissen ist dasjenige, für welches $(ABCD) = -1$, das harmonische. Da nämlich das Doppelverhältniss $\varkappa = +1$ dem Falle entspricht, wo zwei der Punkte zusammenrücken, ein Fall, der in allen weiteren Sätzen immer nur als sehr specieller erscheinen wird, so ist das harmonische unter allen anderen das einzige, dessen reciproker Werth ihm selbst gleich ist, für welches also nicht nur vier, sondern acht Verhältnisse denselben Werth besitzen. Im harmonischen Doppelverhältnisse können die zugehörigen Punkte nicht nur gleichzeitig, sondern auch einzeln ohne Werthänderung vertauscht werden. Hierauf allein beruhen die meisten Eigenschaften harmonischer Punktsysteme und harmonischer Strahlensysteme, wie man die Verbindungslinien von vier harmonischen Punkten mit einem beliebigen anderen Punkte in der Ebene nennt.

Ist $(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1$, so wird

$$AC : CB = AD : BD \qquad 1)$$

Da das Doppelverhältniss einen negativen Werth hat, so liegt einer der Punkte C oder D innerhalb, der andere ausserhalb der Strecke AB, und zwar wird die Strecke AB von dem einen Punkte innerhalb in dem nämlichen Verhältnisse, wie von dem anderen ausserhalb getheilt. Das Gleiche gilt von der Theilung der Strecke CD durch A und B. Liegt der Punkt C in der Mitte von AB, so rückt D in's Unendliche, denn es ist:

$$(ABC\infty) = -\frac{AC}{CB} = -1.$$

Bewegt sich der Punkt C von der Mitte aus zum Punkte B, so rückt der harmonisch zugeordnete Punkt aus dem Unendlichen nach B hin. In der Grenzlage fallen C und D mit dem Punkt B zusammen.

Die vorstehende Relation des harmonischen Doppelverhältnisses kann man noch in die verschiedensten Formen bringen, wovon nur die wesentlichsten erwähnt werden sollen. Es ist überhaupt, wenn der Werth des Doppelverhältnisses $(ABCD)$ mit $\varkappa$ bezeichnet wird,

2) $\varkappa = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{AB - AC} : \frac{AD}{AB - AD}$

$$= \left(\frac{AB}{AD} - 1\right) : \left(\frac{AB}{AC} - 1\right)$$

$$\varkappa = \left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{AB}\right) : \left(\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB}\right) \text{ oder } \frac{\varkappa}{AC} = \frac{\varkappa - 1}{AB} + \frac{1}{AD}$$

also für $\varkappa = -1$ wird:

3) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ oder $\frac{1}{AB} = \frac{\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}}{2}$

d. h. der reciproke Werth der Entfernung eines Punktes von seinem harmonisch zugeordneten ist das arithmetische Mittel der reciproken Entfernungen desselben Punktes von den beiden anderen. Nach dem Sprachgebrauche der Alten nennt man die Grösse $\frac{x_1 + x_2}{2\, x_1 x_2}$ das harmonische Mittel von $x_1\, x_2$ und es ist der Name des harmonischen Verhältnisses eben daraus abgeleitet.

Nimmt man M in der Mitte von A und B an, so ergiebt sich, da $AM = MB$, aus Gleichung 1):

$$(AM + MC)\,(BM + MD) = (CM + MB)\,(AM + MD)$$

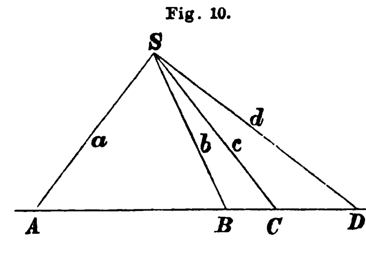
die Relation:

4) $$\overline{AM}^2 = MC \,.\, MD.$$

Es ist für vier harmonische Punkte das Quadrat des halben Abstandes der beiden Punkte A und B gleich dem Producte der Entfernungen der beiden anderen zugeordneten Punkte C und D von der Mitte der Strecke AB.

Wir haben bisher ein harmonisches Strahlensystem als ein solches angesehen, welches alle Transversalen harmonisch theilt; wir wollen dasselbe jetzt durch eine Eigenschaft definiren, welche ihm selber inhärent und nicht auf eine Transversale bezüglich ist. Sind nämlich überhaupt a, b, c, d vier in einem Punkte S sich schneidende Gerade und ist $\varkappa$ das Doppelverhältniss $(ABCD)$, in welchem sie irgend eine Transversale schneiden, so ist:

Fig. 10.



$$(a\,b\,c\,d) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)} = \varkappa, \qquad 5)$$

wobei alle Winkel in dem Sinne der Drehung zu' nehmen sind, welcher durch die Richtung entsprechender Strecken auf der Geraden bestimmt ist.

Denn es ist:

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(SAC)} = \frac{AC}{SC} \qquad \frac{\sin(cb)}{\sin(SBC)} = \frac{CB}{SC} \text{ also:}$$

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} \cdot \frac{\sin(SBC)}{\sin(SAC)} = \frac{AC}{CB}$$

und ebenso:
$$\frac{\sin(ad)}{\sin(db)} \cdot \frac{\sin(SBD)}{\sin(SAD)} = \frac{AD}{DB}. \qquad 6)$$

Da nun $\sin(SBD) = \sin(SBC)$ und $\sin(SAD) = \sin(SAC)$, so erhält man die zu beweisende Gleichung 5). Wie dann aus diesem Satze die Projectivität des Doppelverhältnisses folgt, ist evident. Derselbe gewinnt nunmehr eine fundamentale Bedeutung; denn aus ihm folgt, dass jede Gleichung zwischen Doppelverhältnissen von vier Punkten auf einer Geraden unmittelbar ihr Analogon hat in den Doppelverhältnissen von vier Strahlen durch einen Punkt. Sind im ersten Falle gewisse Relationen zwischen Längen von Strecken ausgesagt, so lassen sich dieselben ohne weiteres übertragen zwischen den Sinusfunctionen von Winkeln. In jeder Gleichung darf, kurz gesagt, die Form $(ABCD)$ durch $(abcd)$ ersetzt werden; so hat man z. B. (Gleich. 10, §. 1)

$$(ABCD) + (ACBD) = 1$$

also auch:
$$(abcd) + (acbd) = 1 \qquad 7)$$

und letztere Gleichung liefert die in der Trigonometrie abgeleitete Identität:

$$\sin(ab) . \sin(cd) + \sin(bc) . \sin(ad) + \sin(ca) . \sin(bd) = 0, \qquad 8)$$

welche der Identität (§. 1, Gl. 3):

$$AB . CD + BC . AD + CA . BD = 0$$

vollkommen entspricht.

Nach der Gleichung 2) können wir die Relation bilden:

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(ab - ac)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(ab - ad)} = \frac{\cot(ad) - \cot(ab)}{\cot(ac) - \cot(ab)}. \qquad 9)$$

Speciell für ein **harmonisches** System ist:

10) $$2\cot(ab) = \cot(ac) + \cot(ad).$$

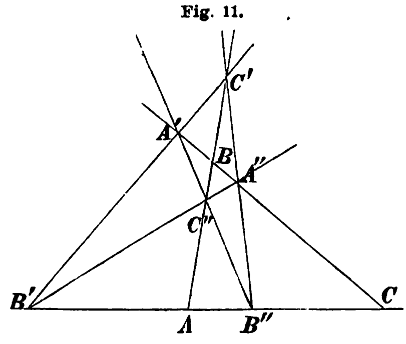
Liegt insbesondere der Strahl a innerhalb des harmonischen Systemes so gegen c und d, dass $\cot(ac) + \cot(ad) = 0$ ist, also der Winkel zwischen c und d von a halbirt wird, so steht die Linie b senkrecht auf a; $(\cot(ab) = 0)$ das heisst die Linien a und b halbiren die von c und d gebildeten Winkel.

§. 3.

Vollständiges Vierseit und Viereck.

Es seien A', A'', B', B'', C', C'' die sechs Ecken eines vollständigen Vierseites, A, B, C die Durchschnitte der Diagonalen. Man denke sich BB' gezogen und hat dann in B' ein System von vier Linien, welches auf den Diagonalen $C'C''$ u. $A'A''$ die gleichen Doppelverhältnisse abschneidet: $(C'C''BA) = (A'A''BC)$. Ebenso hat man, wenn BB'' gezogen wird, ein System in B'', welches dieselben vier Punkte C', C'', B, A projicirt auf A'', A', B, C; es ist somit $(A'A''BC) = (A''A'BC) = -1$.

Fig. 11.



Auf den Diagonalen eines vollständigen Vierseits bestimmen die beiden Eckpunkte des Vierseits und die Schnittpunkte der beiden anderen Diagonalen ein System von vier harmonischen Punkten und zwar je ein Paar von zugeordneten Punkten.

Ein sehr einfacher Beweis dieses fundamentalen Lehrsatzes kann auch so gegeben werden, dass man die Linie $B'B''AC$ in's Unendliche projicirt. (Fig. 12.) Dann wird $A'A''C'C''$ ein Parallelogramm, B halbirt $A'A''$, der Punkt C liegt im Unendlichen auf $A'A''$, also ist $(A'A''BC) = -1$.

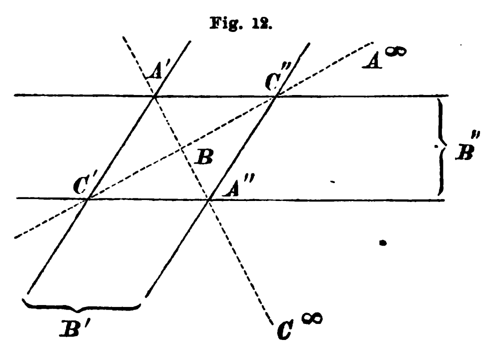
Fasst man in Figur 11. $A'A''B'B''$ als ein vollständiges Viereck auf, so sind $CC'C''$ die Durchschnitte der Gegen-

seiten, die sogenannten **Diagonalpunkte**; verbindet man diese, so erhält man den zu dem obigen polar reciproken Satz:

In den Diagonalpunkten eines vollständigen Viereckes bestimmen die beiden Gegenseiten des Viereckes und die Verbindungslinien mit den beiden anderen Diagonalpunkten ein System von vier harmonischen Strahlen und zwar je ein Paar von zugeordneten Strahlen.

An diese Sätze schliesst sich die Lösung der Aufgabe, zu drei gegebenen Punkten $B' B'' A$ den vierten harmonischen Punkt C zu finden, welcher dem Punkte A zugeordnet ist. Man ziehe (Fig. 11) durch A eine beliebige Gerade, nehme auf dieser zwei Punkte C' C'' beliebig an, verbinde diese mit B', B''. Die so entstehenden Linien schneiden sich ausser in $C' C'' B' B''$ noch in zwei Punkten $A' A''$, deren Verbindungslinie durch den gesuchten harmonischen Punkt C geht.

Fig. 12.



Da die Wahl des Punktes C'' eine willkührliche ist, und man jeden anderen Punkt auf der einmal angenommenen Geraden AC' hätte wählen können, so hat man den Satz:

Zieht man in einem Dreieck eine Transversale durch die Spitze und legt durch einen beliebigen Punkt derselben und durch die beiden anderen Ecken Linien, so schneiden diese die gegenüberliegenden Seiten des Dreieckes in zwei Punkten, deren Verbindungslinien immer durch einen festen in der Grundlinie des Dreieckes liegenden Punkt geht.

Denken wir uns nicht $C' C''$ als zunächst gegeben, sondern den Punkt C, so erhalten wir den reciproken Satz, der weiter unten folgt; man könnte aber denselben auch aus der Lösung der reciproken Aufgabe ableiten: Zu drei gegebenen Strahlen b' b'' a den a zugeordneten vierten harmonischen Strahl zu finden. Man lege durch einen Punkt C der Geraden a zwei beliebige Gerade c' c'', welche die Seiten

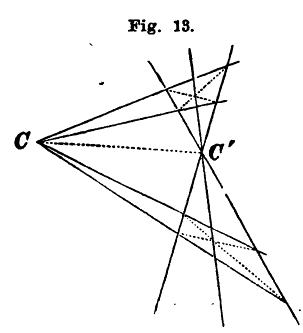
$b' \; b''$ in vier Punkten $A' \; A'' \; B' \; B''$ schneiden. Der Durchschnitt ihrer Verbindungslinien C'' liegt mit dem gemeinsamen Punkte der Strahlen $b' \; b'' \; a$ auf der gesuchten vierten harmonischen Geraden. Lässt man c' sich nun um C drehen, so folgt daraus der Satz:

Legt man durch einen festen Punkt in der Grundlinie eines Dreiecks eine beliebige Gerade und zieht von deren Durchschnitten mit den Seiten des Dreiecks Verbindungslinien nach den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks, so schneiden sich diese in einem Punkte, der immer auf einer festen durch die Spitze des Dreiecks gehenden Transversalen liegt.

Hält man nur C und die Geraden $C'B'$, $C'B''$ fest, lässt dagegen auch die Punkte $B' \; B''$ variiren, so hat man den Satz:

Zieht man durch einen festen Punkt C in der Ebene zweier fester Geraden zwei beliebige Gerade, verbindet deren Durchschnitte mit den festen Geraden kreuzweise mit einander, so erhält man einen Durchschnittspunkt, der immer auf einer festen Geraden liegt; dieselbe geht durch den Durchschnitt C' der beiden festen Geraden und ist die vierte, der Linie $C'C$ zugeordnete Harmonikale des Büschels bei C'.*)

Fig. 13.



Der vorhergehende Satz liefert bei derselben Behandlung, wenn auch jetzt $B'B''$ frei gelassen werden, folgenden Satz:

Es sind in einer Ebene drei sich in einem Punkte schneidende Gerade a, b, c gegeben; legt man durch irgend

---

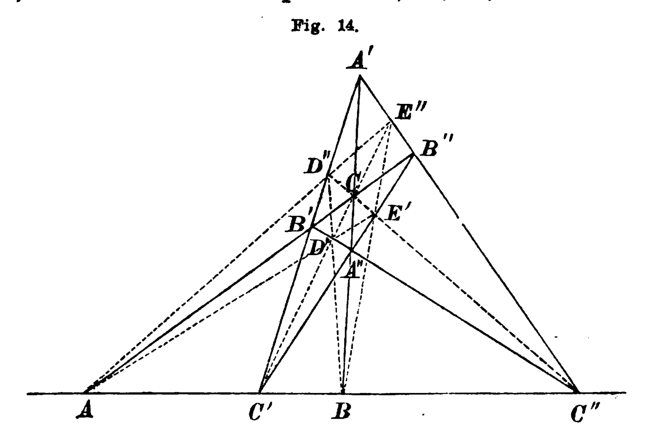
*) Hieraus kann man folgende lineare Construction ableiten: Es seien zwei Gerade a, b und ein Punkt C'' gegeben. Durch diesen soll eine nach dem unzugänglichen Schnittpunkte der Linien a und b gerichtete Gerade gezogen werden.

Auflösung: Man ziehe durch C'' zwei beliebige Gerade und ziehe die Verbindungslinien ihrer Durchschnitte mit a und b; diese Linien schneiden sich in einem Punkte C, von dem aus man wieder zwei beliebige Linien ziehe, deren Durchschnitte mit a und b man kreuzweis verbinde. Dadurch erhält man einen Durchschnitt C_0, der mit C'' auf der verlangten Geraden liegt.

einen Punkt von c zwei beliebige Gerade und verbindet deren Durchschnitte mit a und b unter einander, so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem Punkte, der auf einer festen Geraden liegt; dieselbe geht durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt von a, b, c und ist die vierte, C zugeordnete Harmonikale.

Als Beispiel weiterer Anwendungen der Sätze mag noch folgendes Theorem angeführt werden, das schon in der Einleitung (pag. 17) erwähnt wurde. Verbindet man zwei gegenüberliegende Ecken C', C'' eines vollständigen Vierseits mit dem gegenüberliegenden Durchschnitt C der Diagonalen $A'A''$, $B'B''$, so bilden die Schnittpunkte E', E'', D'', D' dieser Linien

Fig. 14.



mit den Seiten des Vierseits ein vollständiges diesem eingeschriebenes Viereck, dessen Seiten sich in den Durchschnitten der Diagonalen des ursprünglichen Vierseits schneiden. Die vier Strahlen CC', CC'', CB, CA sind harmonisch, also auch deren Durchschnitte mit der Seite $D''E''$ des eingeschriebenen Viereckes. Bezeichnet man den Durchschnitt von $D''E''$ und CA mit O, den Punkt $D''E''$ und BC mit N, so ist also $(D''E''NO)$ harmonisch. Ebenso sind $A'C'$, $A'C''$, $A'B$, $A'A$ harmonische Strahlen, und da sie jene Seite des Vierecks in den drei Punkten D'' E'' N schneiden, so geht auch $A'A$ durch O, das heisst durch den Durchschnitt von CA mit $D''E''$. Es muss also der Punkt O mit dem Punkte A zusammenfallen.

Der hiezu reciproke Satz lautet: Verbindet man in einem vollständigen Vierecke zwei Diagonalpunkte, so schneidet diese Linie die Seiten in zwei weiteren Punkten. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit den Ecken des Viereckes bestimmen ein Vierseit, dessen Ecken paarweise auf den Verbindungslinien der Diagonalpunkte gelegen sind.

Der Satz vom Vierseit gestattet die rein lineare Lösung einer grossen Anzahl von Aufgaben, auf deren Aufzählung und Ausführung wir indess nicht näher eingehen können. Folgende Bemerkungen mögen zur allgemeinen Orientirung dienen: Handelt es sich darum, *mittels des Lineals allein Maassverhältnisse zu construiren*, so muss man überall noch irgend ein, der Natur der Aufgabe entsprechendes, *metrisches Verhältniss als gegeben ansehen*. Ist z. B. eine Strecke $B'B''$ und *ihre Mitte* A gegeben, so lässt sich die Aufgabe durch irgend einen Punkt A' eine Parallele zu $B'B''$ zu ziehen, folgendermassen lösen. Man ziehe die Geraden $A'B'$ und $A'B''$, welche eine beliebig durch A gelegte Gerade in C', C'' schneiden, ziehe die Linien $B'C''$, $B''C'$, welche sich in A'' treffen, so ist $A'A''$ die verlangte Parallele.

Fig. 15.

Wie diese Construction auf der harmonischen Relation im Vierseit beruht, ist unmittelbar einleuchtend, wenn die Linien $B'A'$, $B'A''$, $B''A'$, $B''A''$ als Seiten des Vierseits aufgefasst werden.

Ebenso ist die Aufgabe, eine Strecke $B'B''$ zu halbiren, mittels des Lineals allein ausführbar, sobald eine zu $B'B''$ *parallele Gerade* gegeben ist.

Durch Construction des vierten harmonischen Strahles löst man ferner folgende reciproke Aufgabe: Wenn ein *rechter* Winkel und ein anderer beliebiger Winkel einerlei Scheitelpunkt und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, so soll mittels des Lineals der letzte Winkel verdoppelt werden; oder: Wenn von drei Strahlen der eine mit den beiden anderen *gleiche* Winkel bildet, so soll der auf jenem rechtwinklige mittels des Lineals allein construirt werden.

In der ersten Aufgabe ist also ein rechter, in der zweiten zwei gleiche Winkel gegeben, damit neue metrische Verhältnisse construirt werden können.*)

§. 4.
Metrisch-projectivische Relationen im Allgemeinen. Dreiecks- und Dreiseits-Verhältnisse.**)

Es sei $A, B, C, \ldots$ irgend eine Figur im Raume; man verbinde alle Punkte derselben mit einem Augenpunkte O und nehme dann auf den Projectionsstrahlen Punkte $A', B', C', \ldots$ jenen entsprechend nach irgend einem Gesetze an, welches nur der Bedingung zu genügen hat, dass Punkten, welche in Einer Geraden liegen, wieder solche entsprechen, die sich in Einer Geraden befinden. Wir erhalten so die allgemeinste (collineare) Projection „en relief" eines Objectes, bei welcher z. B. einem ebenen Vierecke ein windschiefes entsprechen kann.

Bezeichnen wir nun mit p_{AB} das von O auf die Strecke AB gefällte Perpendikel u. s. f., so haben wir:

$$AB = \frac{OA \, . \, OB \sin AOB}{p_{AB}}$$

$$BC = \frac{OB \, . \, OC \sin BOC}{p_{BC}}$$

u. s. f. und ganz analog für die Projection:

$$A'B' = \frac{OA' \, . \, OB' \sin AOB}{p_{A'B'}}$$

u. s. f. Hat man nun eine Function der Strecken AB, $BC, \ldots$ der einen Figur, aus welcher bei der Substitution der obigen Werthe OA, OB, OC, $\ldots$ p_{AB}, p_{BC} u. s. f. ganz herausfallen und nur die $\sin AOB$, $\sin BOC$ .. stehen bleiben, so sieht man, dass dieselbe Function der Strecken $A'B'$, $B'C', \ldots$ sich auf dieselbe Function von $\sin AOB$, $\sin BOC, \ldots$ reducirt, d. h. die betreffende Function der Strecken projectivisch ist. Umgekehrt wird nur eine solche Function der

*) Weitere Ausführung dieses Themas in Steiners interessanter kleiner Schrift: „Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises." 1833.

**) Poncelet: Traité des propriétés projectives.

Strecken projectivisch sein können, welche diese Eigenschaft hat.

Jede projectivische Relation von AB, BC, .. kann daher durch eine Relation zwischen $\sin AOB$, $\sin BOC$, ... ersetzt werden. Beschreibt man um O eine Kugel, welche die Strahlen OA, OB, .. in A'', B'', ... schneidet, so sieht man, dass die projectivische Relation zwischen den Strecken AB, BC, .. einer ebenen Figur sofort auf die Punkte $A''B''$, $B''C''$ einer Kugel übertragen werden kann, indem die Strecken durch die Sinus der Hauptkreisbogen ersetzt werden.

Man kann nun leicht den Charakter projectivischer Relationen noch weiter eruiren. Sind AD, DB Strecken einer Geraden, so ist:

$$AD = \frac{OA \, . \, OD \sin AOD}{p_{AB}}, \quad DB = \frac{OD \, . \, OB \sin DOB}{p_{DB}}$$

also:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{OA \sin AOD}{OB \sin DOB}.$$

Enthält also eine Relation Theilverhältnisse von Strecken einer Geraden, so bleiben bei diesen Substitutionen ausser den Sinus nur noch die Factoren OA, OB übrig; soll die Function projectivisch sein, so müssen sich diese herausheben. Ein Product von Theilungsverhältnissen ist demgemäss projectivisch, wenn die Endpunkte der getheilten Strecken ebenso oft im Zähler als im Nenner erscheinen.

Ist zum Beispiel C ein Punkt auf AB, also:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA \sin AOC}{OB \sin COB},$$

so hat man:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\sin AOC}{\sin COB} : \frac{\sin AOD}{\sin DOB},$$

das Doppelverhältniss ist also projectivisch. Sind $ABCD$ vier Punkte auf einer Kugel, die in einem Hauptkreise liegen, so wird man:

$$\frac{\sin AC}{\sin CB} : \frac{\sin AD}{\sin DB} = (ABCD)$$

deren Doppelverhältniss nennen. Dasselbe hat dann ganz die nämlichen Eigenschaften, wie das von vier Punkten, die auf einer Geraden liegen; z. B.:

Legt man durch diese vier Punkte und einen beliebigen Punkt S der Kugel Hauptkreise, so werden diese auf einem

beliebigen transversalen Hauptkreise vier Punkte abschneiden, deren Doppelverhältniss gleich denen der $A\ B\ C\ D$ ist.

Alle descriptiven und aus der Betrachtung von Doppelverhältnissen abgeleiteten Eigenschaften von Figuren können somit von der Ebene sofort auf die Kugel übertragen werden, wenn man überall Hauptkreise an die Stelle von Geraden setzt.

Werden auf den Seiten $A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots A_n A_1$ eines n Ecks Punkte $E_1, E_2, \ldots E_n$ angenommen, so nennt man das Product der Theilverhältnisse

$$\frac{A_1 E_1}{E_1 A_2} \cdot \frac{A_2 E_2}{E_2 A_3} \cdots \frac{A_n E_n}{E_n A_1} = (A_1 \ldots A_n,\ E_1, \ldots E_n) \qquad 1)$$

das **Vielecksverhältniss**. Dasselbe ist projectivisch, da im Zähler und Nenner die Ecken $A_1 \ldots A_n$ gleich oft erscheinen. Jeder an einem ebenen Vielecke von diesem nachgewiesene Satz gilt daher ohne weiteres auch für ein windschiefes sowie für ein sphärisches Vieleck. Wir untersuchen zunächst solche Theilverhältnisse am **Dreieck**; für dieselben besteht der Satz des **Menelaos** (1. Jahrh. n. Chr.), häufig auch Satz des **Ptolemäos** genannt:

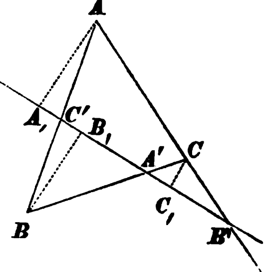
Werden die Seiten eines Dreiecks ABC von einer beliebigen Transversalen in $A'B'C'$ geschnitten, so ist das Dreiecksverhältniss:

$$(ABC,\ C'A'B') = \frac{AC'}{C'B}\ \frac{BA'}{A'C}\ \frac{CB'}{B'A} = -1, \qquad 2)$$

also das Product dreier nicht aneinander stossender Segmente gleich dem der drei anderen:

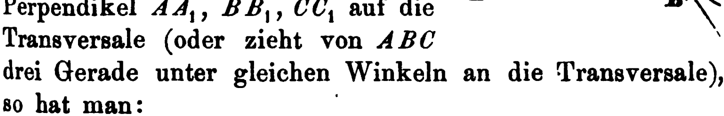
$$AB' \,.\, BC' \,.\, CA' = CB' \,.\, BA' \,.\, AC'.$$

Fig. 16.



Und umgekehrt, wenn auf den Seiten eines Dreiecks ABC die Punkte A' B' C' so liegen, dass vorstehende Relation erfüllt ist, so befinden sich letztere auf einer Geraden.

Denn fällt man (Fig. 16) von A, B, C Perpendikel AA_1, BB_1, CC_1 auf die Transversale (oder zieht von ABC drei Gerade unter gleichen Winkeln an die Transversale), so hat man:



$$\frac{AC'}{C'B} = -\frac{AA_1}{BB_1},\ \frac{BA'}{A'C} = -\frac{BB_1}{CC_1},\ \frac{CB'}{B'A} = -\frac{CC_1}{AA_1}$$

daher die geforderte Relation.

Einen anderen sehr einfachen Beweis liefert die Projectionsmethode. Wird die Transversale in's Unendliche projicirt, so ist $\frac{AC'}{C'B} = -1$, $\frac{BA'}{A'C} = -1$, $\frac{CB'}{B'A} = -1$, also $(ABC, C'A'B') = -1$, und da das Dreiecksverhältniss projectivisch ist, so hat es immer diesen Werth.

Ist ABC ein sphärisches Dreieck, $A'B'C'$ ein Hauptkreis, so ist:

3) $$\frac{\sin AC'}{\sin C'B}\ \frac{\sin BA'}{\sin A'C}\ \frac{\sin CB'}{\sin B'A} = -1$$

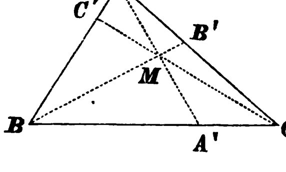
und in dieser Form hat **Menelaos** diesen Satz zum Fundamente der ganzen sphärischen Trigonometrie gemacht. Mit Hilfe desselben beweisen wir ferner den Satz von **Ceva** (1678):

Schneiden sich drei durch die Ecken ABC eines Dreiecks gelegte Transversalen in Einem Punkte M, so ist das Dreiecksverhältniss:

4) $$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A} = +1$$

wo A', B', C' die Durchschnitte der Transversalen mit den gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks sind und umgekehrt: Wenn drei Punkte A' B' C' auf den drei Seiten eines Dreiecks ABC das Dreiecksverhältniss $= +1$ geben, so schneiden sich ihre Verbindungslinien mit den Ecken in Einem Punkte.

Fig. 17.



Wird CC' als Transversale des Dreiecks $AB'B$ angesehen, so hat man nach Menelaos:

$$\frac{AC}{CB'}\cdot\frac{B'M}{MB}\cdot\frac{BC'}{C'A} = -1$$

und wenn AA' Transversale von $BB'C$:

$$\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BM}{MB'}\cdot\frac{B'A}{AC} = -1,$$

woraus durch Multiplication das Theorem entspringt.

Einen eleganteren Beweis liefert die Projection von M in's Unendliche; dann ist (Fig. 18) $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, also:

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC}{CB'},\quad \frac{BA'}{A'C}=\frac{B'A}{AC}$$

und

$$\frac{AC'}{C'B}\,\frac{BA'}{A'C}=\frac{B'A}{CB'}.$$

Der natürlichste, auch von Ceva selbst gegebene Beweis beruht auf statischen Betrachtungen, die selbstverständlich sich auch geometrisch begründen lassen.

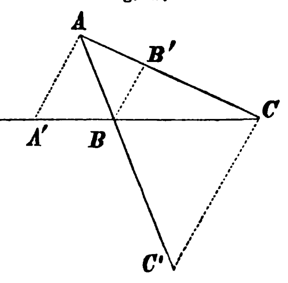


Fig. 18.

Man denke sich (Fig. 17) in den Ecken A, B, C des Dreiecks Gewichte von der Grösse λ, μ, ν angebracht, und suche deren Schwerpunkt. Dazu wird man zunächst AB in C' nach dem Verhältniss $\frac{AC'}{C'B}=\frac{\mu}{\lambda}$ theilen, auf der Linie CC' liegt dann der Schwerpunkt. Theilt man ebenso $\frac{BA'}{A'C}=\frac{\nu}{\mu}$, $\frac{CB'}{B'A}=\frac{\lambda}{\nu}$, so liegt der Schwerpunkt auch auf AA', BB', d. h. die drei Linien AA', BB', CC' schneiden sich in Einem Punkte, dem Schwerpunkte M; diese Linien aber schneiden die Seiten in solchen Verhältnissen, dass:

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=\frac{\mu}{\lambda}\,\frac{\nu}{\mu}\,\frac{\lambda}{\nu}=1.$$

Durch analoge Betrachtungen ergeben sich die entsprechenden Sätze für das Dreiseit.

Werden durch die Ecken eines Dreiseits abc Transversalen $a'\,b'\,c'$ gelegt, so nennen wir

$$\frac{\sin ac'}{\sin c'b}\,\frac{\sin ba'}{\sin a'c}\,\frac{\sin cb'}{\sin b'a}=(a\,b\,c,\,c'\,a'\,b') \qquad 5)$$

das Dreiseitsverhältniss. — Bezeichnen wir mit $A\,B\,C$ die Ecken, mit $A'\,B'\,C'$ die Durchschnitte der Transversalen mit den gegenüberliegenden Seiten desselben Dreiecks, so besteht die Relation:

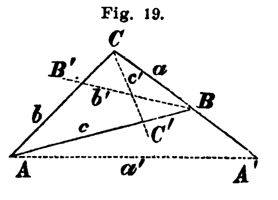


Fig. 19.

$$(a\,b\,c,\,c'\,a'\,b')\,.\,(A\,B\,C,\,C'\,A'\,B')=-1.\text{*)} \qquad 6)$$

*) Chasles, Traité de géométrie supérieure. pag. 261.

Beweis. Es ist

$$\frac{AC'}{CC'} = \frac{\sin bc'}{\sin bc}, \quad \frac{C'B}{CC'} = \frac{\sin c'a}{\sin ac}$$

also:

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ac'}{\sin c'b}$$

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\sin ba}{\sin ca} : \frac{\sin ba'}{\sin a'c}$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{\sin cb}{\sin ab} : \frac{\sin cb'}{\sin b'a}.$$

Liegen die drei Punkte $A'\,B'\,C'$ auf einer Geraden, so ist nach Menelaos $(A\,B\,C,\ C'A'B') = -1$ und wir erhalten so den zu Ceva's Theoreme dualen Satz:

Verbindet man die Punkte, in welchen eine Transversale die Seiten eines Dreiseits abc schneidet, mit den gegenüberliegenden Ecken durch Gerade $a'\,b'\,c'$, so ist das Dreiseitsverhältniss:

$$7) \qquad \frac{\sin ac'}{\sin c'b} \cdot \frac{\sin ba'}{\sin a'c} \cdot \frac{\sin cb'}{\sin b'a} = +1,$$

und umgekehrt: Ist das Dreiseitsverhältniss $(a\,b\,c,\ c'\,a'\,b') = +1$, so schneiden die drei Transversalen die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten, welche in gerader Linie liegen.

Ferner erhält man aus Ceva's Theorem den zu Menelaos' Satze dualen:

Schneiden sich drei durch die Ecken eines Dreiseits abc gehende Transversalen $a'\,b'\,c'$ in Einem Punkte, so ist:

$$8) \qquad \frac{\sin ac'}{\sin c'b}\,\frac{\sin ba'}{\sin a'c}\,\frac{\sin cb'}{\sin b'a} = -1;$$

und umgekehrt: Wenn das Dreiseitsverhältniss $(a\,b\,c,\ c'a'b') = -1$, so schneiden sich die drei Transversalen in Einem Punkte.

Hievon lässt sich auch ein sehr einfacher directer Beweis liefern: Ist M der Durchschnitt der drei Transversalen, so hat man:

$$\frac{\sin ac'}{\sin b'a} = \frac{BM}{MC}, \quad \frac{\sin ba'}{\sin c'b} = \frac{CM}{MA}, \quad \frac{\sin cb'}{\sin a'c} = \frac{AM}{MB}$$

und die Multiplication gibt obige Gleichung.

Wir haben oben gesehen, dass, wenn man eine Strecke $A_1 B_1$ welche in C_1' nach dem Verhältniss $\frac{A_1 C_1'}{C_1' B_1} = \varkappa$ getheilt

ist, zugleich mit deren unendlich entferntem Punkte C_1'' projicirt, man 4 Punkte $A\ B\ C'\ C''$ erhält, deren Doppelverhältniss $(A\ B\ C'\ C'') = -\varkappa$. Denkt man sich nun ein Dreieck ABC mit den Theilpunkten $A'\ B'\ C'$ und den unendlich entfernten Punkten $A''\ B''\ C''$ projicirt, so geht das Dreiecksverhältniss in ein Product von 3 Doppelverhältnissen über, und wir erhalten so z. B. aus dem Satze des Menelaos den folgenden:

Werden die Seiten eines Dreiecks ABC von zwei Transversalen je in den Punkten $A'\ B'\ C'$, $A''\ B''\ C''$ geschnitten, so ist:

$$(ABC'C'')\,(BCA'A'')\,(CAB'B'') = +1. \qquad 9)$$

Zieht man in der Ebene eines Dreiecks ABC eine Transversale, welche die Seiten in $A'\ B'\ C'$ schneidet, so ist, wie wir eben gesehen haben [Gl. 2)],

$$\frac{AC'}{C'B}\,\frac{BA'}{A'C}\,\frac{CB'}{B'A} = -1.$$

Construirt man nun auf den drei Seiten die zu $A'B'C'$ conjugirten harmonischen Punkte $A''\ B''\ C''$, so hat man:

$$\frac{AC''}{C''B} = -\frac{AC'}{C'B},\quad \frac{BA''}{A''C} = -\frac{BA'}{A'C},\quad \frac{CB''}{B''A} = -\frac{CB'}{B'A}.$$

Daher ist:

$$\frac{AC''}{C''B}\,\frac{BA'}{A'C}\,\frac{CB''}{B''A} = -1,$$

also liegen wie $A'B'C'$ auch die Punkte:

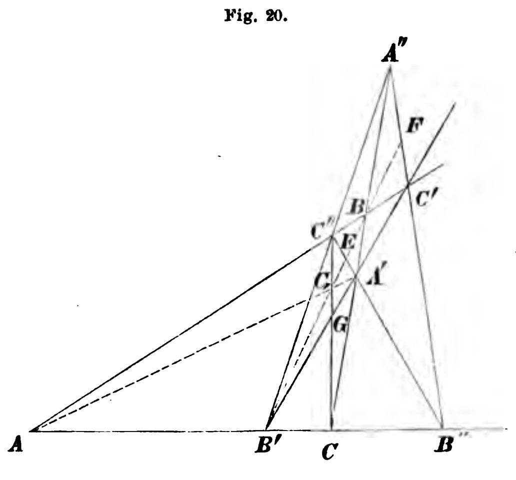
$$A'\ B''\ C'',\quad A''\ B'\ C'',\quad A''\ B''\ C' \qquad \text{I)}$$

je auf einer Geraden. Es bilden demnach $A'A''B'B''C'C''$ ein vollständiges Vierseit, mit dem Diagonaldreiecke ABC.

Wird der Satz von dieser Seite her angesehen, so begreift man, wie er sich auch von den Eigenschaften des Vierseits aus beweisen lassen muss. Bilden jene Punkte ein vollständiges Vierseit, so ist die harmonische Lage selbstverständlich und wir können daher die Punkte $A''\ B''\ C''$ anstatt durch ihre harmonische Lage vielmehr durch ein Vierseit bestimmt denken. Es fragt sich aber, ob man stets ein Vierseit construiren könne, wenn sein Diagonaldreiseit ABC und eine Seite $A'B'C'$ (mit drei Eckpunkten desselben) gegeben ist. Um diese Frage zu beantworten, verfahre man so:

Wenn ABC, $A'B'C'$ gegeben sind, so construire man zunächst den 4ten harmonischen Punkt B'' zu ACB'. Zieht man dann $B''A'$, $B''C'$ und nennt deren Durchschnitte mit den anderen Diagonalen C'' und A'', so ist nachzuweisen, dass $B'A''C''$ in einer Geraden liegen. Dazu ziehe man BB' und nenne deren Durchschnitte mit den von B'' ausgehenden Seiten E und F. Dann sind, da $ACB'B''$ harmonisch liegen, auch $A'C''B''E$ und $A''C'B''F$ harmonisch (wenn man jene Punkte von B aus projicirt). Verbindet man also B' mit C'', so ist diese Linie der 4te harmonische Strahl zu $B'B''$, $B'E$, $B'A'$. Ebenso ist $B'A''$ der 4te Strahl zu $B'B''$, $B'F$, $B'C'$, und da drei Strahlen dieser zwei Büschel coincidiren, so fallen auch $B'C''$ und $B'A''$ zusammen, q. e. d.

Fig. 20.



Es kann also aus dem Diagonaldreiseit und einer Seite stets eindeutig und lineal ein vollständiges Vierseit construirt werden.

Die Punkte $A''B''C''$ aber sind dann die vierten harmonischen zu $A'B'C'$ und liegen zu je zwei mit den letzteren auf einer Geraden. So ist der obige Satz nochmals bewiesen.

Unter den bisherigen Voraussetzungen ist

$$\frac{AC'}{C'B}\,\frac{BA'}{A'C}\,\frac{CB''}{B''A} = +1,$$

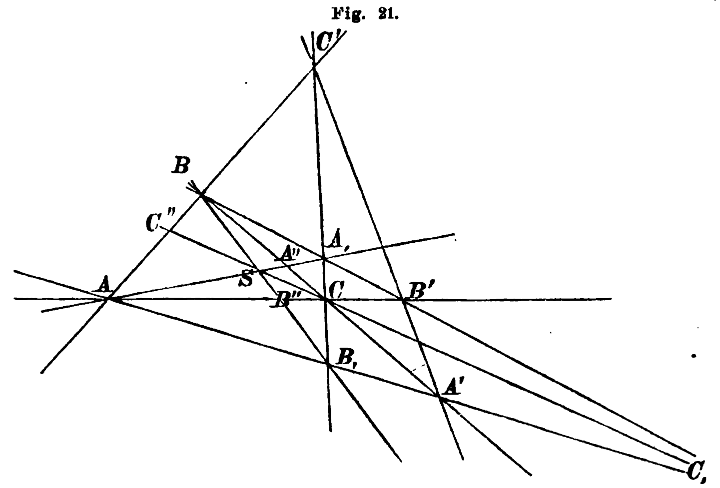
also schneiden sich die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken mit

	$A'B''C'$	in	einem	Punkte	B_1
ebenso	$A'B'C''$	„	„	„	C_1
„	$A''B'C'$	„	„	„	A_1.

Ferner ist $\frac{AC''}{C''B}\,\frac{BA''}{A''C}\,\frac{CB''}{B''A} = +1$, also schneiden sich auch die Verbindungslinien von $A''\,B''\,C''$ mit den gegenüberliegenden Ecken in einem Punkte S.

Dieser Satz kann auch leicht am Vierseit bewiesen werden: Zieht man BB', AA', so hat man in jedem Punkte A und B ein harmonisches Büschel; die Transversale CC''

Fig. 21.



wird von beiden in harmonischen Punkten geschnitten, von denen drei, nämlich $C''\,G\,C$ jedenfalls identisch sind, also fallen auch die 4ten, nämlich die Durchschnitte von AA' und BB' mit CC'' zusammen in einem Punkte C_1.

Um den anderen Theil zu beweisen, so bemerke man, dass die 4 von C ausgehenden harmonischen Strahlen die Transversale BB'' in denselben drei Punkten, nämlich in B, B'' und B_1 schneiden, wie die 4 von A ausgehenden; es fallen also auch die 4 Punkte zusammen, d. h. AA'', BB'', CC'' schneiden sich in S.

Vom Vierseit selbst ausgesprochen, lautet jetzt der Satz:

Verbindet man die Ecken eines Vierseits mit den gegenüberliegenden Durchschnitten der Diagonalen, so werden diese 6 Geraden sich zu je drei in 4 Punkten schneiden, also ein vollständiges Viereck bilden.

Ausserdem mag man bemerken, dass an einem vollständigen Vierseit $A'\,A''\,B'\,B''\,C'\,C''$, dessen drei Ecken $A'\,B'\,C'$

in einer Geraden liegen, ausser den bekannten Relationen für die Doppelverhältnisse

$$(ABC'C'') = -1, \quad (BCA'A'') = -1, \quad (CAB'B'') = -1$$

u. s. f. noch die Dreiecksverhältnisse gelten:

$$(ABC, C'A'B') = -1, \qquad (ABC, C''A''B'') = +1$$
$$(ABC, C''A'B') = +1, \quad (ABC, C'A'B'') = +1, \quad (ABC, C'A''B') = +1$$
$$(ABC, C'A''B'') = -1, \quad (ABC, C''A''B') = -1, \quad (ABC, C''A'B'') = -1,$$

die sich natürlich auch aus den Doppelverhältnissen ableiten lassen. —

Der reciproke Satz zu dem obigen lautet so: Zieht man durch die 3 Ecken eines Dreiseits Transversalen ($a'\,b'\,c'$), welche sich in einem Punkte (S) schneiden, construirt ferner in jeder Ecke die vierten Harmonikalen ($a''\,b''\,c''$) zu diesen, so schneiden sich diese 6 Transversalen ausser in S noch zu je dreien in Punkten ($A_1 B_1 C_1$) und es schneiden die Transversalen die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in 6 Punkten ($A'\,B'\,C'\,A''\,B''\,C''$), welche zu je dreien auf einer Geraden liegen. (Man bemerkt, wie dieser Satz an derselben Figur zur Geltung kommt, wie der obige; nur dass er die Construction an einer anderen Stelle beginnt und das zum Ausgangspunkte macht, was vorhin der Endpunkt war.)

Dieselbe Figur kann auch noch anders aufgefasst werden: Das Vierseit mit den 6 Ecken A, C, A_1, C_1, S, B_1 hat B zum Durchschnitt zweier Diagonalen; verbindet man diesen mit den Ecken A, C, so erhält man auf den Seiten die 4 Punkte $A'\,A''\,C'\,C''$, deren Verbindungslinien sich in B', B'' schneiden.

In dieser Form haben wir den Satz schon früher kennen gelernt; dort war das Vierseit $ACA_1C_1SB_1$ als Ausgang genommen, jetzt aber erscheint dasselbe als das durch die Construction bedingte, und wollte man daher den Satz aus unserer Figur strenge beweisen, so müsste man zeigen, wie dieselbe stets von jenem Vierseit aus construirt werden könnte, d. h. dass das Vierseit $ACA_1C_1SB_1$ jede beliebige Form annehmen kann.

An diesem Beispiele mag man ersehen, wie man aus derselben Figur die verschiedensten Sätze, die zunächst sich auf ganz andere Figuren zu beziehen scheinen, ablesen kann, wenn man die Linien und Punkte anders gruppirt und bald

diese, bald jene Theile der Figur als die ursprünglichen ansieht, von denen aus dieselbe construirt worden ist. Es gelingt dies aber nur dadurch, dass die Sätze und Figuren vollständig entwickelt werden; denn hätten wir z. B. nur den Theil des Satzes in's Auge gefasst, dass die Verbindungslinien der Ecken ABC des Dreiecks mit den zu den gegebenen $A'B'C'$ conjugirten Punkten $A''\,B''\,C''$ sich in einem Punkte S schneiden, so wären wir zu keiner anderen Ansicht von der Figur gelangt. Indem man aber die Folgerungen einer Construction vollständig entwickelt, gelangt man zu einem System von Beziehungen, welches nun als das ursprüngliche aufgefasst, wiederum gestattet, das System der früheren Voraussetzungen aus sich abzuleiten. Das ist die „systematische Abhängigkeit geometrischer Gestalten", wie Steiner den Grundgedanken der neueren Geometrie so schön ausgesprochen hat. Hierin liegt die Quelle des unerschöpflichen Reichthums an Sätzen, wie sie die neuere Geometrie mit solcher Leichtigkeit entwickelt.

Betrachten wir noch schliesslich einige specielle Fälle der Transversalen im Dreieck und Dreiseit.

Sind $a'b'c'$ Winkelhalbirende eines Dreiseits abc, so ist $\frac{\sin ab'}{\sin b'c} = \pm 1$, $\frac{\sin bc'}{\sin c'a} = \pm 1$, $\frac{\sin ca'}{\sin a'b} = \pm 1$. Um die inneren und äusseren Winkelhalbirenden zu unterscheiden, setzen wir den Sinn der drei Seiten etwa in cyklischer Weise fest; mag dann der positive Sinn der Winkel der eine oder der andere sein, immer sind jene drei Verhältnisse für die inneren Winkelhalbirenden negativ. Aendert man den Sinn einer Seite, so werden zwei der Verhältnisse positiv, das dritte bleibt negativ und wir haben somit in jedem Falle:

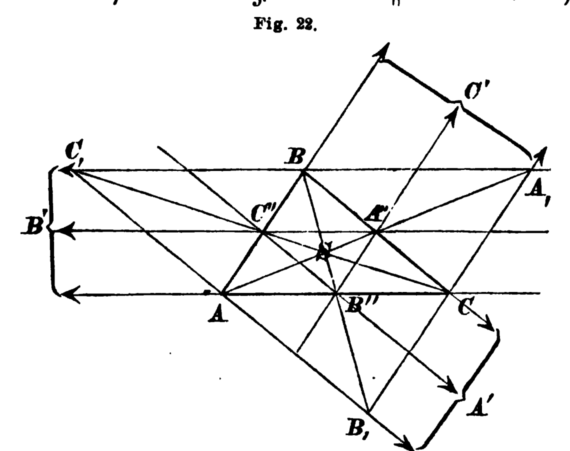
$$(abc,\ c'a'b') = -1$$

d. h. die inneren Winkelhalbirenden schneiden sich in einem Punkte. Nach vorstehendem Satze schneiden sich die inneren und äusseren Winkelhalbirenden ferner noch in 3 Punkten; die Durchschnitte derselben mit den gegenüberliegenden Seiten liegen zu je 3 auf 4 Geraden.

Die Halbirungspunkte $C''\,A''\,B''$ der Seiten eines Dreiecks ABC machen $\frac{AB''}{B''C} = +1$, $\frac{BC''}{C''A} = +1$, $\frac{CA''}{A''B} = +1$,

also $(ABC, C''A''B'') = +1$, d. h. die Verbindungslinien der Seitenmitten mit den Ecken schneiden sich in einem Punkte. Die zugeordneten harmonischen Punkte $A'B'C'$ liegen jetzt im Unendlichen; daher ist jetzt $B''A'' \parallel AB$ u. s. f.*)

Fig. 22.



Fällt man die Höhenperpendikel, so ist:

$$AB' = BB' \cot A, \quad B'C = BB' \cot C,$$

also
$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{\cot A}{\cot C}, \quad \frac{BC'}{C'A} = \frac{\cot B}{\cot A}, \quad \frac{CA'}{A'B} = \frac{\cot C}{\cot B},$$

daher
$$(ABC, C'A'B') = +1.$$

Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkte. Die harmonischen Strahlen zu diesen haben jetzt keine einfache metrische Bedeutung.

---

*) Der im Vorigen entwickelte Satz kann auf diesen speciellen zurückgeführt werden.

Projicirt man nämlich obige allgemeine Figur so, dass die Transversale $A'B'C'$ in's Unendliche rückt, so fallen $A''B''C''$ in die Mitte der Seiten. Man sieht jetzt sofort, dass

$$A'B''C'', \quad A''B'C'', \quad A''B''C'$$

je auf einer Geraden liegen, und dass sich die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken mit

$A'B''C'$ in einem Punkte B_1
$A'B'C''$ „ „ „ C_1
$A''B'C'$ „ „ „ A_1
$A''B''C''$ „ „ „ S

schneiden. Die entsprechenden Eigenschaften finden also auch an der projicirten Figur statt.

§. 5.

Vielecks- und Vielseits-Verhältnisse.

Ein ebenes Polygon $A_1 A_2 \ldots A_n$ wird von jeder beliebigen Transversalen in dem Vielecksverhältnisse

$$(A_1 \ldots A_n E_1 \ldots E_n) = (-1)^n \qquad 1)$$

geschnitten.

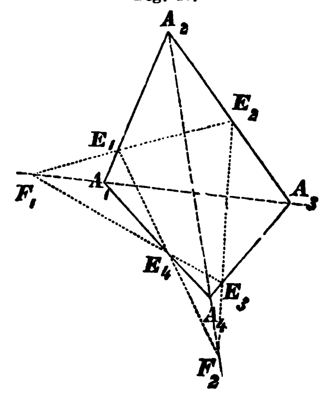
Der Beweis hierfür wird entweder wie beim Dreiecke geführt, indem man von den Ecken Senkrechte auf die Transversale fällt, oder indem man die Transversale in's Unendliche projicirt.

Fassen wir insbesondere ein Viereck $A_1 A_2 A_3 A_4$ in's Auge; eine Transversale schneidet die Seiten desselben, so dass:

$$\frac{A_1 E_1}{E_1 A_2} \frac{A_2 E_2}{E_2 A_3} \frac{A_3 E_3}{E_3 A_4} \frac{A_4 E_4}{E_4 A_1} = +1. \qquad 2)$$

Beim Dreiecke war der betreffende Satz umkehrbar, d. h. wenn das Dreiecksverhältniss $= -1$ war, so lagen die Schnittpunkte in einer Geraden. Das ist beim Viereck im Allgemeinen nicht der Fall; denn es gilt der Satz (Fig. 23):

Fig. 23.



Wenn $E_1 E_2 E_3 E_4$ auf den Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_4 A_1$ eines Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ so liegen, dass das Vierecksverhältniss:

$$(A_1 A_2 A_3 A_4,\ E_1 E_2 E_3 E_4) = +1,$$

so schneidet sich $E_1 E_2$ mit $E_3 E_4$ auf einem Punkte der Seite $A_1 A_3$, und $E_2 E_3$ mit $E_4 E_1$ auf einem Punkte der Seite $A_2 A_4$.

Bezeichnet man den Durchschnittspunkt $E_1 E_2 \cdot A_1 A_3 = F_1'$, $E_3 E_4 \cdot A_1 A_3 = F_1''$ und lässt das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ von $E_1 E_2$, das Dreieck $A_3 A_4 A_1$ von $E_3 E_4$ schneiden, so hat man:

$$\frac{A_1 E_1}{E_1 A_2} \frac{A_2 E_2}{E_2 A_3} \frac{A_3 F_1'}{F_1' A_1} = -1$$

$$\frac{A_3 E_3}{E_3 A_4} \frac{A_4 E_4}{E_4 A_1} \frac{A_1 F_1''}{F_1'' A_3} = -1.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen, so hat man, da das Vierecksverhältniss $= +1$,

$$\frac{A_3 F_1'}{F_1' A_1} \cdot \frac{A_1 F_1''}{F_1'' A_3} = +1, \quad \frac{A_1 F_1''}{F_1'' A_3} = \frac{A_1 F_1'}{F_1' A_3}$$

d. h. es fallen F_1' mit F_1'' zu einem Punkte F_1 zusammen. Ebenso zeigt man, dass sich $E_2 E_3$, $E_4 E_1$, $A_2 A_4$ in einem Punkte F_2 schneiden.

Im Speciellen können die beiden Linien $E_1 E_2$, $E_3 E_4$ zusammenfallen; es ist aber diese Lage der Schnittpunkte nur ein specieller Fall, der das Vierecksverhältniss $= +1$ macht.

Der vorstehende Satz aber ist in gewisser Hinsicht umkehrbar: Wenn $E_1 E_2 E_3 E_4$ auf den Seiten des Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ so liegen, dass $E_1 E_2 E_3 E_4$ sich mit der Seite $A_1 A_3$ in einem Punkte F_1 schneiden, so ist das Vierecksverhältniss $= +1$ und es schneiden sich auch $E_2 E_3$, $E_4 E_1$ auf einem Punkte F_2 der Seite $A_2 A_3$.

Beweis mittels der obigen Dreiecksverhältnisse:

$$\frac{A_1 E_1}{E_1 A_2} \frac{A_2 E_2}{E_2 A_3} \frac{A_3 F_1}{F_1 A_1} = -1, \quad \frac{A_3 E_3}{E_3 A_4} \frac{A_4 E_4}{E_4 A_1} \frac{A_1 F_1}{F_1 A_3} = -1,$$

daher $(A_1 A_2 A_3 A_4, E_1 E_2 E_3 E_4) = +1$ u. s. w.

Die vorstehenden Erörterungen finden ihre volle Aufklärung erst in dem vollständig umkehrbaren Satze:

Ein windschiefes Viereck $A_1 A_2 A_3 A_4$ wird von einer beliebigen Ebene in $E_1 E_2 E_3 E_4$ nach dem Vierecksverhältniss $+1$ geschnitten, und umgekehrt, wenn das Vierecksverhältniss $= +1$ ist, so liegen die vier Punkte in einer Ebene.

Projicirt man das Viereck auf eine zur Transversalebene parallele Ebene von einem Punkte der Transversalebene aus, so verwandelt sich dasselbe in ein ebenes Viereck, die Schnitte $E_1 E_2 E_3 E_4$ aber rücken in's Unendliche und es ist somit $\frac{A_1 E_1}{E_1 A_2} = -1$ u. s. f. Die Umkehrung des Satzes lässt sich folgendermassen erweisen. Sei

$$(A_1 A_2 A_3 A_4, E_1 E_2 E_3 E_4) = +1,$$

so lege man durch $E_1 E_2 E_3$ eine Ebene, welche $A_4 A_1$ in E'_4 schneidet; dann ist nach dem ersten Theile des Satzes auch $(A_1 A_2 A_3 A_4\ E_1 E_2 E_3 E'_4) = +1$, also $\frac{A_4 E_4}{E_4 A_1} = \frac{A_4 E'_4}{E_4' A_1}$ d. h. E_1 fällt mit E_1' zusammen. Ein anderer Beweis ergibt sich

aus folgender Betrachtung: Man beachte, dass die Transversalebene A_1A_3 in einem Punkte F_1 schneidet, durch welchen zugleich die Durchschnittslinien jener Ebene mit den Ebenen $A_1A_2A_3$ und $A_3A_4A_1$, d. h. die Linien E_1E_2 und E_3E_4 hindurchgehen. Ebenso schneidet die Transversalebene die Diagonale A_2A_4 in einem Punkte F_2, durch welchen die Linien E_2E_3 und E_4E_1 hindurchgehen. Hieraus lässt sich nun, ganz wie es oben bei dem ebenen Viereck geschah, mittels der Dreiecksverhältnisse nachweisen, dass

$$(A_1A_2A_3A_4, E_1E_2E_3E_4) = +1.$$

Mit dieser eben geführten Untersuchung haben wir zugleich die weitere Anschauung gewonnen: Wird ein vollständiges windschiefes Viereck von einer Ebene geschnitten, so sind die 6 Durchschnittspunkte die Ecken eines vollständigen ebenen Vierseits.

Bei einem ebenen Viereck muss dieser Satz nothwendig modificirt werden und lautet dann, wie früher gezeigt wurde: Beschreibt man in ein vollständiges ebenes Viereck ein vollständiges Vierseit so ein, dass 5 Ecken des letzteren auf 5 Seiten des ersteren liegen und zwar gegenüberliegende Ecken auf gegenüberliegenden Seiten, so wird immer auch die sechste Ecke des Vierseits auf der sechsten Seite des Vierecks liegen.

Wir haben bisher unsere Figur $A_1A_2A_3A_4$ als ein vollständiges Viereck angesehen; es ist ebenso zulässig, die Punkte als die 4 Ecken eines vollständigen Vierseits zu betrachten. Dann lautet der obige Satz: Legt man durch einen Punkt einer Diagonale eines Vierseits zwei Gerade, welche die Seiten des Vierseits in vier Punkten schneiden, so schneiden sich die Verbindungslinien der letzteren auf einer der anderen Diagonalen.

Es erfordert jedoch dieser Satz noch eine nähere Bestimmung, da ausser der angenommenen die beiden noch übrigen Diagonalen mit gleichem Rechte auftreten:

Seien $a\,b\,c\,d$ die vier Seiten des Vierseits; auf der Diagonale $ac-bd$ nehmen wir einen Punkt, durch welchen wir die zwei Transversalen e und f legen. Die Durchschnitte derselben mit den Seiten nennen wir $e_a\,e_b\,e_c\ldots f_d$.

Wir haben jetzt die Verbindungslinien der Durchschnitte der Transversalen mit je zwei in den Punkten ac und bd zusammenlaufenden Seiten zu ziehen, also die Linien

$$e_a f_c,\quad e_c f_a,\quad e_b f_d,\quad e_d f_b.$$

Dann bilden $e_a e_d f_b f_c$ ein Viereck, welches dem Viereck ad, db, bc, ca eingeschrieben ist; dies aber hat die Diagonalen $ad - bc$ und $db - ac$, es liegt also $e_a f_c \cdot e_d f_b$ auf der Diagonale $ad - bc$. Ein gegen diese Diagonalen sich ähnlich verhaltendes Viereck bilden $e_c e_b f_d f_a$, und es wird daher auch $e_c f_a \cdot e_b f_d$ auf der Diagonale $ad - bc$ liegen. Dagegen ist das Viereck $e_a e_b f_d f_c$ einem Viereck mit den Diagonalen $bd - ca$ und $ad - bc$ eingeschrieben, ebenso wie das Viereck $e_c e_d f_b f_a$ und es liegen daher $e_a f_c \cdot e_b f_d$ und $e_c f_a \cdot e_d f_b$ auf der Diagonale $ab - cd$. Jene vier Linien $e_a f_c$, $e_c f_a$, $e_b f_d$, $e_d f_b$ schneiden sich demnach zu je zwei in zweimal zwei Punkten, von denen zwei auf der einen, die anderen zwei auf der anderen Diagonale liegen.

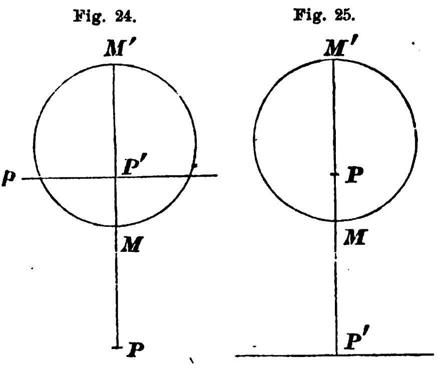
Zweiter Abschnitt.

Das Princip der Dualität.

§. 1.

Pol und Polare am Kreise.

Verbindet man einen Punkt P in der Ebene eines Kreises mit dem Mittelpunkte durch eine Gerade, welche den Kreis in MM' schneidet, nimmt auf MM' den zu P conjugirten harmonischen Punkt P', zieht durch diesen eine zu MM' senkrechte Linie p, so nennt man p die Polare von P und P den Pol der Geraden p. Zu jedem Pol gehört demnach eine ganz bestimmte Polare, und ist letztere gegeben, so ist ihr Pol P ebenfalls unzweideutig bestimmt; er liegt auf dem Perpendikel von dem Mittelpunkte des Kreises auf p, so dass $(PP'MM') = -1$.*)



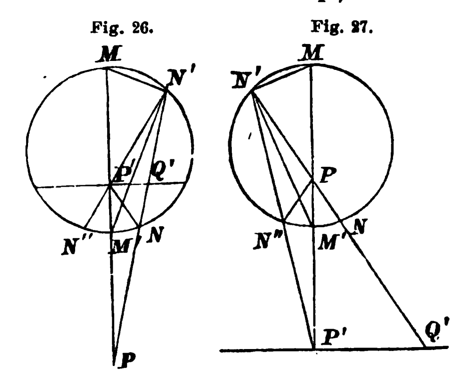
Einem Punkte P ausserhalb des Kreises entspricht eine Polare, welche den Kreis in reellen Punkten schneidet; einem Punkte P innerhalb eine den Kreis nicht schneidende Gerade. Einem Punkte P auf der Peripherie des Kreises entspricht die Tangente des Kreises in P.

---

*) Ohne solche vorläufige Feststellung dieser Begriffe scheint mir die Lehre von Pol und Polare an dieser Stelle, und so lange man den Kreis nicht gleichzeitig als Ortscurve und als Tangentengebilde betrachtet, nicht streng begründet werden zu können. Die gewöhnliche Entwickelung derselben (s. auch Steiner, Geom. Constr. p. 30) enthält einen logischen

Legt man (Fig. 26, 27) durch einen Punkt P in der Ebene eines Kreises eine Secante, welche den Kreis in NN' schneidet und bestimmt zu $NN'P$ den vierten harmonischen Punkt Q', so nennt man PQ' zugeordnete harmonische Punkte in Bezug auf den Kreis.

Alle zu einem Punkte P in Bezug auf einen Kreis zugeordneten harmonischen Punkte Q' liegen auf einer Geraden p, der Polare jenes Punktes.



Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich folgendermassen, und ist unabhängig davon, ob P inner- oder ausserhalb des Kreises liegt. Man construire zu P den 4ten harmonischen Punkt P' auf dem Durchmesser MM', welcher durch P geht, ferner den harmonischen Punkt Q' auf einer beliebigen Secante NN'. Nun sind $MM'PP'$ harmonisch, also auch die Strahlen $N'M$, $N'M'$, $N'P$, $N'P'$, von denen $N'M \perp N'M'$, also wird der Winkel $P'N'N$ durch $N'M$, $N'M'$ halbirt. Daher sind, wenn $N'P'$ den Kreis nochmals in N'' schneidet, die Bogen $NM = MN''$, somit die Winkel $NP'M = MP'N''$; da nun die Strahlen von P' nach N, N', Q', P harmonisch sind, so ist $P'Q' \perp P'P$, d. h. der Punkt Q' liegt auf der zu P gehörenden Polare. Aus diesem Satze folgt die: lineale Construction der Polare eines Punktes. Man ziehe von P zwei beliebige Secanten PAB, PCD des Kreises, construire $AC . BD = R$, $AD . BC = Q$ und es ist $p = QR$ die Polare zu P.

Denn zufolge der Eigenschaften des Vierecks $ABCD$ sind, wenn man noch RP zieht, in R vier harmonische Strahlen.

Fehler, indem wohl gesagt wird, was die Polare eines Punktes, nicht aber unzweideutig definirt wird, was der Pol einer gegebenen Geraden sei. Dieser Fehler rächt sich und gibt dieser so einfachen Lehre einen Schein von Schwierigkeit, die sie keineswegs hat.

Daher liegt auch der Punkt, in welchem p die Linie PAB schneidet, harmonisch zu P in Bezug auf die Punkte A und B, desgleichen der Schnittpunkt mit PCD harmonisch zu P in Bezug auf C und D. Mithin enthält p zwei zu P harmonische Punkte. Zugleich ist $PR = q$ die Polare von Q, $PQ = r$ die Polare von R.

Ein Durchschnitt zweier Gegenseiten eines einem Kreise einbeschriebenen vollständigen Vierecks hat also jedesmal die Verbindungslinien der beiden anderen Durchschnitte zur Polare.

Man sieht, wie man hienach die Tangenten von einem Punkte an den Kreis lineal bestimmen kann. Weitere Folgerungen werden sich uns später noch ergeben.

Alle Polaren, welche zu den Punkten Q einer Geraden p gehören, schneiden sich in einem Punkte, dem Pole P jener Geraden. Zum Beweise dieses Satzes construire man zunächst den Pol P der Geraden p nach den zu Anfang gemachten Bemerkungen.

Legt man durch P zwei beliebige Secanten AB, CD, so schneiden sich die Verbindungslinien AC und BD und ebenso AD und BC auf der Polare p; dabei können, wie man sich leicht durch stetige Bewegung überzeugt, die Durchschnitte Q und R jede mögliche Lage auf p erhalten. Es ist nun aber $PR = q$ die Polare von Q, also gehen sämmtliche Polaren des Punktes Q, wo er auch immer auf p liegen mag, durch den Pol dieser Linie, den Punkt P.

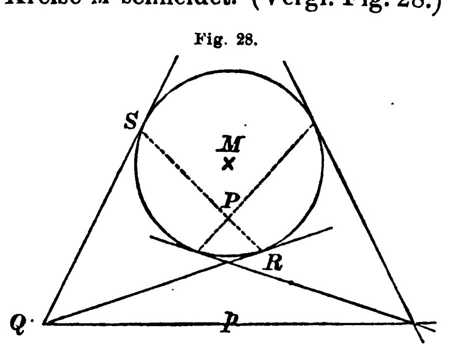
Die Umkehr dieses Satzes sagt aus: Die Pole Q aller Geraden q, welche durch einen Punkt P gehen, liegen auf einer Geraden, der Polare p von P. Mit Hilfe dieses Satzes erfolgt alsdann die lineale Construction des Pols einer gegebenen Geraden. Zu dem Zwecke bestimme man die Polaren zweier beliebigen Punkte auf dieser Geraden, so ist der Durchschnitt derselben der gesuchte Pol.

Vorstehende Sätze lassen sich auch so fassen:

Wenn sich zwei Tangenten eines Kreises so bewegen, dass ihr Durchschnittspunkt längs einer festen Geraden p hingleitet, so dreht sich ihre Berührungssehne immer um einen festen Punkt P. Eine einfache räumliche Construction liefert hiefür einen an-

schaulichen Beweis.*) Es sei eine Kugel und eine Gerade p ausserhalb derselben gegeben; man lege durch p und den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene, welche die Kugel in dem Kreise M schneidet. (Vergl. Fig. 28.) Construirt man durch p die beiden Tangentialebenen an die Kugel, so steht die Verbindungslinie von deren Berührungspunkten P', P'' senkrecht auf der Ebene der Zeichnung und schneidet diese in P. Wird nun durch irgend einen Punkt Q der Linie p der Tangentialkegel an die Kugel gelegt, so wird der Ort der Berührungspunkte auch die beiden Berührungspunkte P' P'' enthalten; denn es sind QP', QP'' Tangenten von P an die Kugel. Die Spur SR der Ebene jenes Berührungskreises geht also durch P, wo auch immer Q angenommen werden möge. Es gehören aber QR, QS auch zu den von Q an die Kugel gelegten Tangenten und es ist also RS die Berührungssehne von Q.

Fig. 28.



Umgekehrt: Zieht man durch einen Punkt P Secanten, construirt in den Durchschnitten mit dem Kreise die Tangenten, so befinden sich deren Durchschnitte sämmtlich auf einer Geraden p.

Man sieht jedoch, dass dieser höchst anschauliche Beweis nur auf den Fall anwendbar ist, dass P innerhalb des Kreises liegt. Wollte man daher den Satz auf diese Weise allgemein begründen, so müsste man sich des früher erwähnten, von Poncelet aufgestellten Principes der Continuität bedienen, wonach eine Eigenschaft, welche an einer Figur in allen Lagen einer gewissen Art erwiesen ist, allgemein für alle Lagen gilt, wenn auch einige der zum Beweis derselben verwendeten Elemente imaginär werden.

---

*) Monge's Géométrie descriptive.

§. 2.

Die Dualität zwischen Punkt und Gerade.

In der Geometrie, wie sie von Euklid begründet ist, bildet das Grundelement aller räumlichen Figuren der Punkt. Durch seine Bewegung entsteht eine Curve; zwei unendlich nahe Punkte bestimmen eine Tangente der Curve. Die einfachste aller Linien ist die Gerade, d. h. der geometrische Ort eines Punktes, der sich nach einer festen Richtung bewegt. Neben diese Geometrie lässt sich nun eine andere zu ihr duale stellen, in welcher das Grundelement die Gerade ist; durch Bewegung einer solchen entsteht wiederum eine Curve, d. h. das System der diese umhüllenden Tangenten; zwei unendlich benachbarte Geraden bestimmen einen Punkt der krummen Linie. Das einfachste aller dieser Tangentengebilde ist der Punkt; d. h. der geometrische Durchschnitt aller Geraden, welche sich in einem festen Orte drehen.

Zwischen diesen beiden Gebilden besteht nun, wie gezeigt werden soll, ein durchgreifender Parallelismus, so dass jeder Eigenschaft einer als Punktgebilde betrachteten Figur eine duale Eigenschaft einer als Geradengebilde betrachteten Figur entspricht. Es fragt sich nur, welche Figuren und welche Eigenschaften sich dual entsprechen.

Handelt es sich nur um Figuren, welche ohne Anwendung des Cirkels mit Hilfe des Lineals allein construirt werden können, so hat die Feststellung des Begriffes der Dualität keine Schwierigkeit: Einem Strahlenbüschel entspricht eine geradlinige Punktreihe, wie einer Geraden ein Punkt. Gehen wir dann zu weiteren Gebilden in der Ebene über, so definiren wir: Dual heissen zwei Figuren, wenn jedem Punkte oder Strahlenbüschel in der einen eine Gerade oder eine geradlinige Punktreihe in der anderen entspricht und zwar so, dass zweien Punkten in der einen Figur PP' und ihrer Verbindungslinie m zwei Gerade pp' in der anderen mit ihrem Durchschnitt M entsprechen. Man sieht ein, dass hiernach drei in gerader Linie liegenden Punkten der einen Figur in der anderen drei Gerade, welche sich in einem Punkte schneiden, entsprechen müssen. Man erkennt ferner,

wie zufolge unserer Definition einem Dreiecke ein Dreiseit, einem Vierecke ein Vierseit entsprechen muss, u. s. w.

Mit Hilfe dieser Beziehungen ist es nun leicht, zu jeder Figur, die ohne Cirkel nur mit dem Lineale allein gezeichnet ist, eine duale ebenfalls rein lineal zu construiren. Wenn dann von der einen Figur eine gewisse rein descriptive Eigenschaft erwiesen ist, so lässt sich dieselbe in ihre duale zunächst übersetzen und es fragt sich dann weiter, ob die duale in der That diese Eigenschaft besitzt. Hierüber lässt sich nun am einfachsten so entscheiden: Man geht auf den Beweisgang der betreffenden Eigenschaft zurück, und sucht denselben, indem man ihn schrittweise dual umgestaltet, auf die duale Figur anzuwenden; finden dann alle Schlüsse die man vorhin anstellen musste, auch nach dieser Umgestaltung statt, so gilt auch die duale Eigenschaft an der dualen Figur.

Anstatt dies Verfahren nun bei jedem einzelnen Satze durchzuführen, kann man sich die Sache dadurch abkürzen, dass man ein für allemal die Grundsätze, auf denen ein solcher Beweis überhaupt beruhen kann, darauf prüft, ob dieselben in ihrer dualen Umgestaltung noch zulässig sind. In dieser Weise ist v. Staudt in seiner Geometrie der Lage verfahren und hat so die Dualität a priori begründet.

Hier würde uns diese Prüfung zu weit führen, umsomehr, da wir bald ein anderes, wenn auch nicht so directes Verfahren kennen lernen werden, durch welches jener Nachweis geleistet wird. Gehen wir also zuvörderst weiter.

Nehmen wir an, der Nachweis sei geliefert, dass alle rein descriptiven Eigenschaften der Figuren an den dual umgestalteten in dualer Weise ebenfalls auftreten, so fragt sich weiter, in welcher Weise sich die projectivisch-metrischen Beziehungen in der dualen Figur umgestalten; z. B. also, welche Beziehung 4 Gerade zu einander haben, die 4 harmonischen Punkten einer anderen Figur entsprechen. Hierüber lässt sich nun bereits mittels der Sätze, die wir kennen gelernt haben, eine Entscheidung treffen. Denn 4 harmonische Punkte können angesehen werden als 4 auf einer Diagonale eines Vierseits liegende Punkte, nämlich zwei als Ecken, die beiden anderen als Durchschnitte mit den beiden übrigen Diagonalen. Es entsprechen daher diesen

4 Punkten in der dualen Figur 4 Gerade, welche durch den Durchschnittspunkt gegenüberliegender Seiten eines Vierecks gehen, nämlich zwei als Seiten, die beiden anderen als Verbindungslinien mit den anderen Durchschnitten gegenüberliegender Seiten. Da nun, wie wir wissen, diese 4 Strahlen harmonische sind, so können wir allgemein behaupten, dass 4 harmonischen Punkten immer 4 harmonische Strahlen entsprechen.

Auf ähnliche Weise könnte man nun auch eine Reihe anderer Eigenschaften dualisiren; indess bemerkt man, dass dies Verfahren doch nur auf solche anwendbar ist, welche rein von descriptiven Verhältnissen abhängen. Wie man aber solche metrische Relationen, welche wesentlich des Cirkels zu ihrer Construction bedürfen, zu dualisiren habe, das bleibt auf diesem Wege zunächst völlig unentschieden. Die Definition selbst enthält keine rein metrische Beziehung der beiden Figuren zu einander; es kann demnach auch keine aus ihr herausgelockt werden.

§. 3.

Die polare Reciprocität und deren Anwendung auf projectivisch-metrische Beziehungen.

Ein ganz einfaches Mittel zur Construction dualer Figuren liefern uns die Eigenschaften von Pol und Polare am Kreise.

Nehmen wir in der Ebene einer Figur ganz beliebig einen Kreis an und construiren zu jedem Punkte derselben die Polare in Bezug auf den Kreis, so erhalten wir einen in dem oben festgesetzten Sinne duale Figur zu jener. Denn nach den obigen Sätzen schneiden sich alle Polaren der Punkte einer Geraden in einem Punkte, dem Pole jener Geraden; und es entspricht daher nicht nur einem Punkte der ersten Figur eine Gerade in der zweiten, sondern auch umgekehrt einem Punkte in der zweiten eine Gerade in der ersten Figur; u. s. w.

Da die Beziehung der beiden dualen Figuren zu einander jetzt nicht durch abstracte Bedingungen, sondern durch eine concrete, geometrische Construction festgesetzt ist, mit anderen Worten, einer Figur immer eine ganz bestimmte andere

dual entspricht, so kann ohne Schwierigkeit die zu einer Eigenschaft duale stets angegeben werden; und noch mehr: Wenn eine Eigenschaft einer Figur erwiesen ist, so folgt aus der Construction der dualen Figur sofort, dass sie die duale Eigenschaft besitzt. Damit ist denn, so zu sagen, das Princip der Dualität bewiesen, freilich nicht aus wesentlichen und einfachen Eigenschaften des Raumes, wie es der fundamentalen Natur jenes Principes angemessen wäre, sondern durch abgeleitete Eigenschaften des Kreises. Indessen begnügen wir uns vorläufig damit, dass wir in den Stand gesetzt sind, das Princip zu verwerthen.

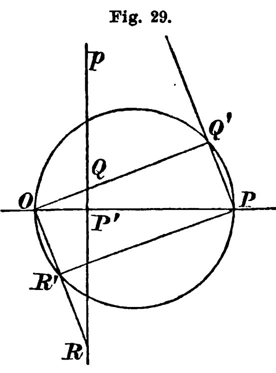
Um die metrischen Eigenschaften der Figuren umgestalten zu können, gehen wir zuvörderst auf die metrische Beziehung von Pol und Polare näher ein: Denken wir uns einen Kreis mit dem Centrum O, so entspricht einem Punkte P eine Polare p, welche auf dem Diameter OP in einem Punkte P' senkrecht steht, der zu P in Bezug auf die Schnittpunkte R und S der Linie OP mit dem Kreise harmonisch ist, also:

$$1) \qquad \frac{RP}{PS} = -\frac{RP'}{P'S}, \quad \frac{RO+OP}{PO+OS} = -\frac{RO+OP'}{P'O+OS}$$

$$OP \,.\, OP' = r^2$$

Man kann daher unabhängig von der Theorie des Kreises die polare Reciprocität, wie man nun diese bestimmte Art der Dualität nach Poncelet nennt, folgendermassen begründen: Es sei (Fig. 29) in einer Ebene ein fester Punkt O, der Mittelpunkt der Dualität, sowie eine Constante r^2 gegeben. Dann bestimme man zu jedem Punkte P der Ebene die Gerade p, seine Polare, so dass sie auf OP senkrecht steht in einem Punkte P', für welchen $OP' = \frac{r^2}{OP}$ und man erhält auf diese Weise die zu der ersten duale Figur. Denn die Polaren aller in p enthaltenen

Fig. 29.

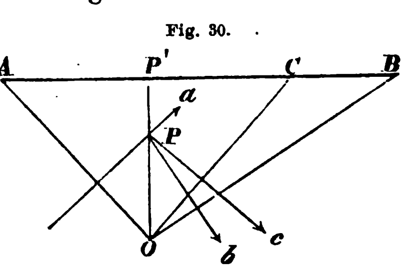


Punkte werden durch P hindurchgehen. Ist nämlich Q ein beliebiger Punkt der Geraden p, so bestimme man auf OQ den Punkt Q', dass $OQ \,.\, OQ' = r^2$ also, da $OP \,.\, OP' = r^2$

auch $OP : OQ' = OQ : OP'$ wird; es ist mithin $\triangle OPQ' \sim OQP'$ d. h. der Winkel bei Q' ein rechter und daher auch PQ' die zu Q gehörige Polare q. Es wird nicht uninteressant sein zu bemerken, dass alle zu den Punkten $Q, R \ldots$ der Polare p gehörigen Punkte $Q', R' \ldots$ auf einem Kreise liegen, der über OP als Durchmesser beschrieben ist.*)

Sind nun A, B, C, D vier Punkte auf einer Geraden p, deren Doppelverhältniss $(ABCD) = \varkappa$, so entsprechen diesen in der dualen Figur vier sich in dem Pole P von p schneidende Geraden a, b, c, d, deren Doppelverhältniss $(abcd)$ denselben Werth $\varkappa$ besitzt. Denn es ist das Doppelverhältniss der 4 Punkte A, B, C, D dasselbe wie das der vier Strahlen OA', OB', OC', OD'. Die vier Geraden a, b, c, d aber stehen auf diesen senkrecht und haben daher dasselbe Doppelverhältniss, da sie in P ein dem Büschel $O(A'B'C'D')$ congruentes Büschel nur in einer um 90^0 gedrehten Lage vorstellen.

Fig. 30.



Ist (Fig. 30) eine Gerade p und auf ihr das Schnittverhältniss dreier Punkte $\frac{AC}{CB} = \varkappa$ gegeben, so entsprechen diesen Punkten drei durch den Pol P von p gehende Strahlen a, b, c und es ist, wenn P' den Fusspunkt des von O auf p gefällten Perpendikels bezeichnet:

$$AC = \frac{OA \cdot OC}{OP'} \sin(ac), \qquad CB = \frac{OB \cdot OC}{OP'} \cdot \sin(cb)$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)}$$

*) Ueberhaupt möge hier nicht unerwähnt bleiben, dass die Zuordnung zweier Punkte P und P' nach dem Gesetze $OP \cdot OP' = r^2$ die Transformation durch reciproke Radien genannt wird. Einem Punktgebilde entspricht dann immer wieder ein Punktgebilde, so zwar dass einer Geraden, wie oben erwähnt ein Kreis, einem Kreise auch wieder ein Kreis zugeordnet wird. Jeder Punkt des um O mit dem Radius r beschriebenen Kreises wird dabei sich selbst zugeordnet, allen Punkten, die ausserhalb des von diesem Kreise begrenzten Ebenenstückes liegen, entsprechen Punkte im Innern des Kreises, und umgekehrt. Die Beziehung, welche auf diese Weise zwischen den

Die Relation zwischen der Lage der Strahlen abc kann also nicht ohne Beziehung zu dem Punkte O erfasst werden. Wohl aber gibt es Combinationen von mehreren Theilverhältnissen, welche bei der dualen Umgestaltung in die entsprechenden Sinusverhältnisse übergehen; so z. B. hat man, wenn D einen vierten Punkt auf AB bezeichnet:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}$$

und überhaupt wird sich eine Function von Theilverhältnissen in der dualen Figur in die entsprechende Function von Sinusverhältnissen verwandeln, wenn sich jene Factoren OA, OB u. s. w. herausheben. Dieselbe Bedingung haben wir bereits oben für den projectivischen Charakter von metrischen Verhältnissen gefunden; denn bedeutet O das Centrum der Projection, so ist $\frac{AC}{CB} = \frac{OA \sin AOC}{OB \sin COB}$ und die Relation wird nur dann projectivisch sein können, wenn sie sich auf ein Sinusverhältniss reducirt, also OA, OB . . in ihr nicht mehr erscheinen. Somit erhalten wir den wichtigen Satz:

Alle projectivischen metrischen Relationen einer Figur verwandeln sich in der dualen in solche, welche statt Entfernungen zweier Punkte die Sinus der Winkel zwischen entsprechenden Geraden enthalten und umgekehrt.

Das Dreiecksverhältniss ist z. B. projectivisch. Dem entsprechend lassen sich die in §. 4. Abschn. I. gesondert bewiesenen Sätze ohne weiteres aus einander ableiten, sobald einer von ihnen als giltig anerkannt worden ist.

Werden die Seiten eines Dreiecks von einer beliebigen Geraden geschnitten, so ist das Dreiecksverhältniss $= -1$, und umgekehrt.	Werden die Ecken eines Dreiseits mit einem beliebigen Punkt verbunden, so ist das Dreiseitsverhältniss $= -1$, und umgekehrt.

Ebenso bedingen sich folgende Theoreme (§. 5. Absch. I) gegenseitig:

Werden die Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 eines ge-	Verbindet man die Ecken a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4a_1 eines

Punkten und Punktgebilden der Ebene hergestellt wird, wird nach Möbius Kreisverwandtschaft genannt.

gebenen Viereckes von einer Geraden in den Punkten E_1, E_2, E_3, E_4 geschnitten, so ist das Vierecksverhältniss $(A_1 A_2 A_3 A_4, E_1 E_2 E_3 E_4) = +1$.

Wenn $E_1 E_2 E_3 E_4$ auf den Seiten eines Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ so liegen, dass das Vierecksverhältniss $= +1$, so schneidet sich $E_1 E_2$ mit $E_3 E_4$ auf einem Punkte der Seite $A_1 A_3$ und $E_2 E_3$ mit $E_4 E_1$ auf einem Punkte der Seite $A_2 A_4$.

gegebenen Vierseites mit einem Punkte durch die Linien e_1, e_2, e_3, e_4, so ist das Vierseitsverhältniss $(a_1 a_2 a_3 a_4, e_1 e_2 e_3 e_4) = +1$.

Wenn $e_1 e_2 e_3 e_4$ durch die Ecken eines Vierseites $a_1 a_2 a_3 a_4$ so hindurchgehen, dass das Vierseitsverhältniss $= +1$, so geht die Verbindungslinie der Punkte $e_1 e_2$ und $e_3 e_4$ durch die Ecke $a_1 a_3$, die Verbindung der Punkte $e_2 e_3$ und $e_4 e_1$ durch die Ecke $a_2 a_4$.

§. 4.

Anwendung der polaren Reciprocität auf nicht projectivisch-metrische Beziehungen.

Construirt man zu zwei aufeinander senkrechten Geraden p, q die Pole P, Q, so werden diese gegen das Centrum O so liegen, dass die Geraden OP, OQ bei O einen rechten Winkel mit einander machen, dass also jene Punkte von O aus gesehen unter einem rechten Winkel erscheinen. Ich werde derartige Punkte kurz als solche bezeichnen, welche (in Bezug auf O) senkrecht zu einander liegen.

Einem Dreieck ABC mit den von den Ecken auf die Gegenseiten gefällten Höhenperpendikeln a', b', c' entspricht daher ein Dreiseit $a_1 b_1 c_1$ mit den drei Punkten A', B', C', welche auf den drei Seiten so liegen, dass ihre Verbindungslinien mit dem Mittelpunkte O senkrecht stehen auf den Verbindungslinien der Ecken des Dreiseits mit dem Mittelpunkte.

Dem Satze, dass die drei Höhenperpendikel sich in einem Punkte schneiden, entspricht daher dual der folgende Satz:

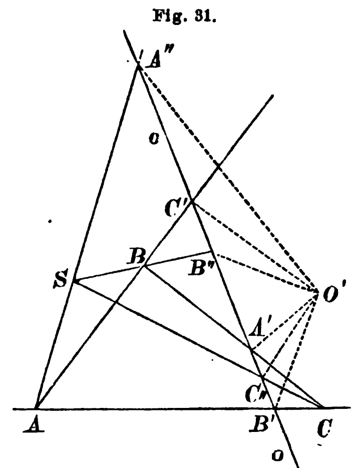
Verbindet man die drei Ecken $A\ B\ C$ eines Dreiecks mit einem beliebigen Punkte O seiner Ebene, errichtet in O Senkrechte auf OA, OB, OC, so schneiden diese die gegen-

überliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten A', B', C', welche in gerader Linie liegen.

Da man jetzt in der Ebene einen beliebigen anderen Punkt O' als Mittelpunkt der Dualisation annehmen und die duale Figur construiren kann, so hat man folgenden Satz:

Nimmt man in der Ebene eines durch eine beliebige Transversale o in A', B', C' geschnittenen Dreiseits einen Punkt O' beliebig an, zieht in O' die zu $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ senkrechten Linien, welche die Transversale o in A'', B'', C'' schneiden, so gehen die Verbindungslinien dieser Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiseits durch einen Punkt S.

Fig. 31.



Man sieht, die Figur ist nicht mehr identisch mit der ursprünglichen; sie enthält zwei neue Elemente, die Transversale o und den Punkt O', die in der ursprünglichen Figur nicht erschienen. Doch ist die letztere allerdings als specieller Fall in unserer jetzigen enthalten; und zwar entspricht sie dem Falle, wo die Transversale o ganz in's Unendliche fällt; denn ist z. B. C' der unendlich entfernte Punkt von AB, so ist $O'C''$ senkrecht auf AB gerichtet und C'' liegt in unendlicher Ferne; somit ist CC'' ein Perpendikel auf AB u. s. w.

Würde man aber unseren allgemeinen Satz nochmals in seinen reciproken umgestalten, so träte wieder ein neues Element hinein und so könnte man eine unendliche Reihe von Sätzen successive aus dem einen entwickeln; freilich würden die Sätze mit zunehmender Complication fort und fort an Interesse verlieren. —

Wenn es sich darum handelt, Relationen, welche zwischen Strecken $AB, \ldots$ der einen Figur bestehen, umzugestalten, so haben wir zu diesem Zwecke bereits oben die Formel:

$$AB = \frac{OA \,.\, OB}{OP'} \sin(ab)$$

gegeben, wo P' der Fusspunkt des Perpendikels von O auf AB ist, a, b die den Punkten A, B entsprechenden Polaren, deren Durchschnitt P auf der Linie OP' liegt. Dabei gehören nun A, B, P' alle der ursprünglichen Figur an; um daher eine ausschliesslich auf die neue Figur sich beziehende Relation zu erhalten, wird es zweckmässig sein, statt A, B, P' die Punkte A', B', P einzuführen, d. h. die Perpendikel von O auf a und b und den Durchschnitt P von ab. Dann hat man:

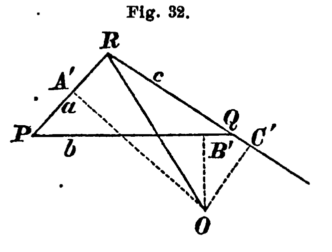
$$AB = r^2 \cdot \frac{OP}{OA' \cdot OB'} \sin(ab).$$

So erhält man z. B. auf diese Weise dual zu dem Pythagorischen Lehrsatze den folgenden:

Beschreibt man über einer Seite PQ eines beliebigen Dreiecks PQR einen rechten Winkel O und fällt von dessen Scheitel O die Perpendikel OA', OB', OC' auf die drei Seiten a, b, c des Dreiecks, so ist:

$$(OP \cdot OC' \sin(ab))^2 + (OQ \cdot OA' \sin(bc))^2 = (OR \cdot OB' \sin(ca))^2.$$

Fig. 32.



In diesem Satze liegt der specielle enthalten, wenn PRQ ein rechter Winkel wird und RQ auf OQ, PR auf OP senkrecht stehen, wo dann $OA' = OP$, $OC' = OQ$. Die Figur $OPRQ$ ist dann ein Rechteck, seine Fläche $= OP \cdot OQ = OB' \cdot PQ = OB' \cdot OR$; und somit hat man in diesem Falle für ein Dreiseit abc mit einem rechten Winkel ac die Gleichung

$$\sin^2(ab) + \sin^2(bc) = \sin^2(ca)$$

welche mit dem Pythagorischen Satze

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

in dualer Beziehung steht.

Man sieht aus alledem, dass die Dualisation der nicht projectivischen metrischen Verhältnisse eine wesentlich andere ist, als die der projectivischen. Denn die zu einer projectivisch-metrischen Relation duale enthält stets nur ebensoviele Elemente, wie die ursprüngliche und kommt an der dualen Figur selbst zur Geltung. Die Relationen dagegen, welche nicht projectivischen entsprechen, erfordern,

um zur Geltung zu kommen, noch die Herbeiziehung eines fremden Elementes, des Mittelpunktes der Dualisation, von dem in der ersten Figur nichts enthalten war; es bleibt in diesem Falle an der Figur immer noch ein Merkmal ihres Ursprunges haften, während dies bei jenen anderen Verhältnissen gänzlich verschwindet.

Es verliert daher die Dualität in Bezug auf nicht projectivische Verhältnisse den sonstigen Charakter der Reciprocität, insofern eine Figur, welche zu einer anderen dual ist, bei nochmaliger Dualisation im Allgemeinen nicht wieder die erste liefert, sondern eine andere, welche zwei Elemente, eine Gerade und einen Punkt, mehr als die ursprüngliche enthält, freilich aber durch Specialisirung immer wieder in diese übergeführt werden kann.

Wenn man daher behauptet, dass das Princip der Dualität sich nur auf rein descriptive und projectivisch-metrische Relationen beziehe, so ist dies in dem oben gemeinten Sinne zu verstehen.

Es bleibt vielmehr die Dualisation auch für die nicht projectivischen Eigenschaften ein höchst werthvolles Princip der Transformation, durch welches man aus einem Satze stets einen mit ihm eng verbundenen, doch auf eine andere Figur bezüglichen Satz erhält. Die Sätze der Elementargeometrie werden auf diese Weise in zwei Reihen geordnet und es ist oft höchst überraschend, zwei Sätze als eng zusammengehörig zu finden, welche auf den ersten Blick gar nichts mit einander gemein zu haben scheinen; z. B.

Die über einem Bogen stehenden Peripheriewinkel im Kreise sind gleich.	Bewegt sich eine Tangente an einem Kreise, so erscheint das Stück derselben, welches zwischen zwei festen Tangenten des Kreises eingeschlossen ist, vom Mittelpunkte des Kreises immer unter demselben Winkel.

Dritter Abschnitt.

Projectivische Beziehung von Punktreihen und Strahlenbüscheln.

§. 1.

Fundamentaleigenschaften projectivischer Punktreihen und Strahlenbüschel.

Wenn die Punkte zweier geraden Linien in irgend eine Beziehung zu einander gesetzt werden, so dass einem Punkte der einen ein oder mehrere Punkte der anderen gesetzmässig entsprechen, so nennen wir die beiden Geraden oder Punktreihen mit einander geometrisch verwandt.

Zwei Punktreihen, welche in solche Lage gebracht werden können, dass sämmtliche Verbindungslinien entsprechender (homologer) Punkte $ABC, \ldots$ und $A'B'C', \ldots$ durch Einen Punkt S gehen, zwei Punktreihen also, welche als Schnitte desselben Strahlenbüschels S angesehen werden können, nennen wir projectivisch [mit Steiner und v. Staudt (collinear nach Möbius, homographisch nach Chasles, conform nach Paulus) und bezeichnen dies mit v. Staudt durch $ABC \ldots \overline{\wedge}\, A'B'C' \ldots$

Die Lage der Geraden gegen einander, bei welcher alle Verbindungslinien homologer Punkte durch einen Punkt S, das Projectionscentrum (Centrum der Collineation, Homographie) gehen, und jede durch S gehende Linie die Geraden in zwei homologen Punkten trifft, nennt man die perspectivische Lage beider Gebilde. Jede andere Lage nennt man eine schiefe.

Aus der Definition folgt sofort: In zwei projectivischen Punktreihen entspricht einem Punkte der einen immer ein, aber nur ein Punkt der anderen und umgekehrt — die Verwandtschaft ist eine ein-eindeutige — und es sind die Doppelschnittverhältnisse je vier entsprechender Punkte einander gleich.

Umgekehrt: Wenn zwei Punktreihen in eindeutiger Verwandtschaft stehen und die Doppelverhältnisse homologer Punkte einander gleich sind, so sind sie projectivisch.

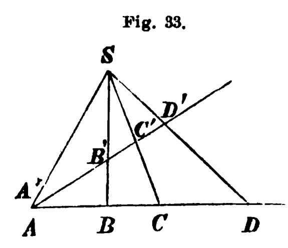


Fig. 33.

Wenn nämlich $(ABCD) = (A'B'C'D')$, u. s. w., so lege man die beiden Geraden p, p' so, dass sie sich in einem Punkte schneiden, dem als Punkt A der einen Geraden p angesehen derselbe Punkt A' als auf der anderen p' gelegen entspricht. Dann ziehe man BB', CC', so gibt deren Durchschnitt S das Projectionscentrum und die beiden Geraden befinden sich in perspectivischer Lage. Denn da $(SA, SB, SC, SD) = (SA', SB', SC', SD')$, so fallen SD, SD' nothwendig zusammen.

Wenn $ABCD \ldots \barwedge A'B'C'D' \ldots$ und es haben drei Punkte ABC in dem einen dieselben Entfernungen von einander, wie die homologen $A'B'C'$ in dem anderen, so dass also $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, so sind die Systeme überhaupt einander congruent.

Man lege die Geraden auf einander, so dass ABC mit $A'B'C'$ zusammenfallen, so werden auch alle anderen entsprechenden Punkte sich in vereinigter Lage befinden.

Es folgt hieraus: **Sind von zwei zu einander projectivischen Punktreihen nur drei Paare homologer Punkte gegeben, so ist die Verwandtschaft eindeutig bestimmt.** Und:

Will man projectivische Punktreihen auf zwei Geraden construiren, so darf man drei Punkte der einen drei beliebigen Punkten der anderen zuordnen.

Wenn $ABCDE \barwedge A'B'C'D'E'$ und es besteht insbesondere zwischen den Entfernungen der Punkte ABC und ihrer homologen $A'B'C'$ die Proportion

$$AB : A'B' = BC : B'C',$$

so dass: $\quad AB = \varrho A'B', \; BC = \varrho B'C', \; CA = \varrho C'A',$

so besteht dieselbe Relation $CD = \varrho C'D'$ für alle homologen Strecken der Geraden.

Legt man $p \parallel p'$, so schneiden sich die Geraden AA', BB' in einem Punkte S, durch den wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ($SB : SB' = BC : B'C'$) auch CC' hindurchgeht. Soll nun $(ABCD) = (A'B'C'D')$ sein, so muss DD' durch S gehen, und es besteht also die Relation $CD = \varrho C'D'$.

Zwei solche Punktreihen nennt man ähnlich; bei ihnen sind die unendlich entfernten Punkte beider Geraden homologe Punkte, während bei projectivischen Geraden im Allgemeinen dem unendlich entfernten Punkte der einen ein endlicher Punkt der anderen entspricht.

Bei der perspectivischen Lage zweier projectivischen Punktreihen gehen alle Verbindungslinien homologer Punkte durch einen Punkt und es schneiden sich die Geraden in einem zu sich selbst homologen Punkte. Es genügt aber schon der Nachweis einer dieser Eigenschaften, um die perspectivische Lage zu charakterisiren. Also:

Wenn zwei projectivische Geraden sich in einem zu sich selbst homologen Punkte schneiden, oder wenn drei Verbindungslinien homologer Punkte sich in einem Punkte schneiden, so liegen die beiden Punktreihen perspectivisch.

Zwei Strahlenbüschel P, P', deren Strahlen einander so zugeordnet sind, dass die Büschel durch Drehung in eine Lage gebracht werden können, bei welcher sich alle homologen Strahlen auf einer Geraden s, der Projectionsaxe schneiden, zwei Strahlenbüschel also, welche „Scheine“ einer geradlinigen Punktreihe sind, nennen wir projectivisch und diese bestimmte Lage perspectivisch. Jede andere Lage heisst eine schiefe.

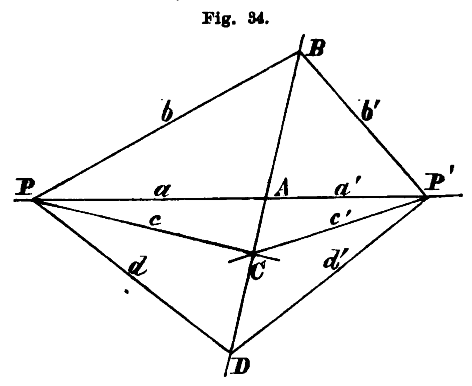
In zwei projectivischen Strahlenbüscheln entspricht jedem Strahle des einen stets ein und nur ein Strahl des anderen, und es sind die Doppelverhältnisse homologer Strahlen einander gleich; $(a\,b\,c\,d) = (a'\,b'\,c'\,d')$.

Umgekehrt: Wenn zwei Strahlenbüschel in eindeutiger Verwandtschaft stehen und alle Doppelverhältnisse homologer Strahlen einander gleich sind, so sind sie projectivisch.

Wenn $(abcd) = (a'b'c'd')$ u. s. w., so lege man (Fig. 34) die Büschel P, P' so, dass zwei homologe Strahlen a, a' zusammenfallen, so dass also dem Strahle PP', als Strahl des Büschels P angesehen, in dem Büschel P' derselbe Strahl $P'P$ entspricht.

Dann verbinde man die Durchschnitte $bb' = B$, $cc' = C$ durch eine Gerade s; nennt man nun D den Durchschnitt ds, D' den Punkt $d's$, so ist: $(abcd) = (a'b'c'd')$ also $(ABCD) = (ABCD')$, demnach fällt D mit D' zusammen, d. h. je zwei einander entsprechende Strahlen schneiden sich bei dieser Lage immer auf der Geraden s.

Fig. 34.



Wenn in einem Strahlenbüschel drei Strahlen abc dieselben Winkel mit einander machen, wie die homologen $a'b'c'$ eines anderen zum ersten projectivischen Büschel, so sind die beiden Büschel überhaupt congruent.

Die projectivische Beziehung zweier Strahlenbüschel ist vollständig bestimmt, sobald drei Paare homologer Strahlen in denselben gegeben sind.

Da sich in einem Strahlenbüschel ein so ausgezeichnetes Element nicht befindet, wie es unter den Punkten einer Geraden der unendlich entfernte Punkt ist, so besteht hier keine Specialisirung, wie die der Aehnlichkeit vorhin.

Bei der perspectivischen Lage zweier Strahlenbüschel schneiden sich alle homologen Strahlen in Punkten, die auf einer Geraden liegen, und die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Büschel ist ein sich selbst homologer Strahl. Eine dieser Eigenschaften aber bedingt schon die andere. Also:

Wenn zwei projectivische Büschel einen homologen Strahl gemein haben, oder wenn sich drei Durchschnitte entsprechender Strahlen auf einer Geraden befinden, so liegen die beiden Büschel perspectivisch.*)

---

*) Die Bezeichnung dieser Lage als „perspectivisch" kann zunächst befremden, da hier eine Perspective im gewöhnlichen Sinne des Wortes nicht vorhanden zu sein scheint. Dreht man aber das eine der Büschel etwa P', welches sich mit P in jener Lage befindet, um die Projectionsaxe s beliebig, so kann es in der That als die Perspective des Büschels P von einem beliebigen Punkte O der Ge-

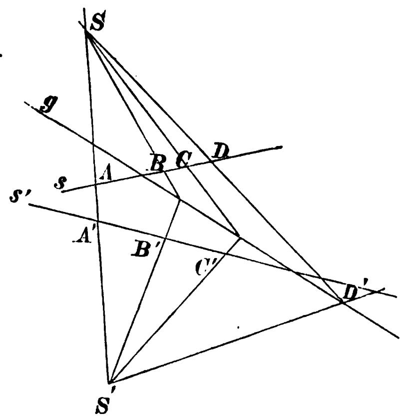
Bei dieser perspectivischen Lage tritt ein besonderer Fall dann ein, wenn je zwei homologe Strahlen in beiden Büscheln gleiche Winkel bilden, so zwar, dass auch der Sinn der Drehung für beide Büschel der gleiche ist. In der perspectivischen Lage werden alsdann je zwei homologe Strahlen einander parallel laufen, und ihre Durchschnitte liegen nicht mehr im Endlichen. Da dieselben indess für alle anderen Fälle bei perspectivischer Lage immer auf einer Geraden gelegen sind, so übertragen wir diesen Satz auch auf den Grenzfall der parallelen Lage: Zwei projectivisch gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel schneiden sich in perspectivischer Lage auf der unendlich entfernten Geraden. Wir kommen damit zu der Aussage, dass alle unendlich entfernten Punkte der Ebene in einer Geraden liegen, die eben als Durchschnitt zweier projectivisch gleichen und gleichlaufenden Strahlbüschel in perspectivischer Lage definirt ist.

§. 2.

Projectivische Beziehungen zwischen zwei Punktreihen oder Strahlenbüscheln.

Wählt man (Fig. 35) auf der Verbindungslinie AA' zweier homologer Punkte in zwei einander zugeordneten Punktreihen $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ zwei beliebige Punkte S, S', so schneiden sich SB, SC, SD, mit den entsprechenden Strahlen $S'B'$, $S'C'$, $S'D'$ in Punkten, die in gerader Linie g liegen; denn die Büschel S S' sind perspectivisch, da sie den entsprechenden Strahl SA und $S'A'$ gemein haben. Es folgt aus diesem Satze die

Fig. 35.



raden PP' aus angesehen werden. Denn es befinden sich dann die homologen Strahlen PA, $P'A$, welche sich im Punkte A auf s schneiden, in einer Ebene mit O.

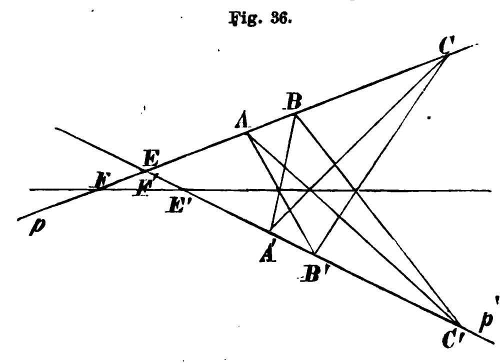
lineale Construction homologer Punkte bei zwei schiefliegenden projectivischen Punktreihen, deren Beziehung durch mindestens drei Punktpaare bestimmt ist. Um z. B. zu dem auf der Punktreihe ABC.. gelegenen unendlich fernen Punkte den homologen zu construiren, lege man durch S eine Parallele zu AB. Der Punkt, in welchem dieselbe die Linie g schneidet, liefert mit S' verbunden, eine Gerade, die auf $A'B'$... den gesuchten Punkt bestimmt.

Dual hiezu ist der Satz:

Legt man durch den Durchschnitt aa' zweier homologer Strahlen in zwei einander zugeordneten Strahlbüscheln abc..., $a'b'c'$... zwei beliebige Transversalen $s\,s'$, so gehen die Verbindungslinien der Durchschnitte sb, sc, sd... mit den entsprechenden $s'b'$, $s'c'$, $s'd'$... durch einen Punkt G. — Hierauf gründet sich eine lineale Construction homologer Strahlen in zwei schiefliegenden projectivischen Büscheln.

Ist ferner (Fig. 36) $ABCD$.. $\overline{\wedge}$ $A'B'C'D'$.., so schneiden sich die kreuzweisen Verbindungslinien homologer Punktpaare, nämlich AB' und $A'B$, AC' und $A'C$, .., BC' und $B'C$, ..., in Punkten, welche in gerader Linie liegen. — Denn die von A nach $A'B'C'$... gezogenen Strahlen bilden ein Büschel, das zu dem von A' aus nach ABC... gezogenen projectivisch ist, insbesondere aber auch perspectivisch zu demselben liegt, weil der Strahl AA' beiden gemeinsam ist; es gibt daher eine Gerade, die Projectionsaxe, auf welcher alle Durchschnitte der von A, A' ausgehenden Strahlen liegen; dieselbe schneidet die Geraden in den ihrem Durchschnitte E (F') homologen Punkten E', F. In denselben Punkten werden aber die Geraden auch von der Linie geschnitten, welche alle Durchschnitte der Strahlen $B'A$, $B'C$, $B'D$... mit BA', BC', BD'... enthält, letztere Gerade ist also mit der ersten identisch.

Fig. 36.



Hieraus folgt eine neue Construction homologer Punkte, welche fast noch einfacher als die frühere ist.

Da ABC, $A'B'C'$ beliebig angenommen werden können, so gilt der Satz: Die gegenüberliegenden Seiten eines in zwei Gerade eingeschriebenen Sechseckes $AB'CA'BC'$, nämlich AB' und $A'B$, $B'C$ und BC', CA' und $C'A$ schneiden sich in drei Punkten, welche in gerader Linie liegen. Dual steht diesen Untersuchungen der Satz gegenüber:

Sind $a\,b\,c\,d \ldots \overline{\wedge}\, a'\,b'\,c'\,d' \ldots$, so schneiden sich die Verbindungslinien der kreuzweisen Durchschnitte homologer Strahlen, nämlich

$$ab' - a'b, \quad ac' - a'c, \quad bc' - b'c$$

in einem Punkte.

Da $a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$ beliebig angenommen werden können, so gilt der Satz: Wenn sich je drei nicht aufeinanderfolgende Seiten eines Sechsseits $ab'ca'bc'$ in je einem Punkte schneiden (nämlich abc in einem, $a'b'c'$ in einem anderen), so schneiden sich die drei Diagonalen

$$ab' - a'b, \quad b'c - bc', \quad ca' - c'a$$

in einem Punkte.

Hieraus folgt wieder eine Construction homologer Strahlen in Büscheln.

Es mögen diese Constructionen ihrer Wichtigkeit wegen hier noch ausdrücklich zusammengestellt werden.

Aufgabe: Aus drei Punktpaaren ABC, $A'B'C'$ auf 2 Geraden s, s' den zu X homologen Punkt X' zu finden.

I. Lösung. Man nehme auf AA' willkührlich S, S' an, dann ziehe man die Gerade g, welche durch $SB \cdot S'B'$, $SC \cdot S'C'$ geht. Um zu X den homologen Punkt zu finden, ziehe man SX und verbinde $SX \cdot g$ mit S', so wird von dieser Linie die Gerade s' in X' geschnitten. (Die Construction kann noch dahin vereinfacht werden, dass man

$$S \text{ gleich } AA' \cdot BB', \quad S' \text{ gleich } AA' \cdot CC'$$

wählt, so wird g die Verbindung von B' und C.)

II. Lösung. Es liegen auf einer Geraden g:

$$AB' \cdot A'B, \quad B'C \cdot BC', \quad CA' \cdot C'A.$$

Um den zu X homologen Punkt X' zu finden, verbinde man

$A'X' \cdot g$ mit A, und es wird diese Linie die Gerade s' in dem verlangten Punkte X' schneiden.

Aufgabe. Aus drei homologen Strahlenpaaren a, a'; b, b'; c, c' zweier Büschel S, S' den homologen Strahl x' zu einem gegebenen x zu finden.

I. Lösung. Man lege durch aa' zwei Gerade $s\,s'$, dann markire man den Punkt G, in welchem sich $sb-s'b'$, $sc-s'c'$ schneiden. Verbindet man sx mit G, so wird diese Linie die Gerade s' in einem Punkte schneiden, der auf x' liegt. [Oder einfacher, man lege die Geraden

$$s \text{ gleich } aa'-bb', \quad s' \text{ gleich } aa'-cc',$$

dann ist G der Schnittpunkt von b' und c.]

II. Lösung. Es schneiden sich in einem Punkte G

$$ab'-a'b, \quad b'c-bc', \quad ca'-c'a.$$

Um zu x den homologen Strahl zu finden, verbinde man $a'x$ mit G durch eine Gerade, welche a in einem Punkte schneidet, der auf x' liegt.

§. 3.

Drei projectivische Gebilde. Desargues' Satz.

Wenn von 3 geradlinigen Punktreihen, $p, p_1, p_2, p \barwedge p_1$, $p_2 \barwedge p_1$, so ist auch $p \barwedge p_2$. Denn da $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$, $(A_2B_2C_2D_2) = (A_1B_1C_1D_1)$, so wird $(ABCD) = (A_2B_2C_2D_2)$.

Schneiden sich drei projectivische Gerade in einem Punkte S, der für alle drei Gerade der homologe ist, so liegen ihre drei Projectionscentren in einer Geraden s.

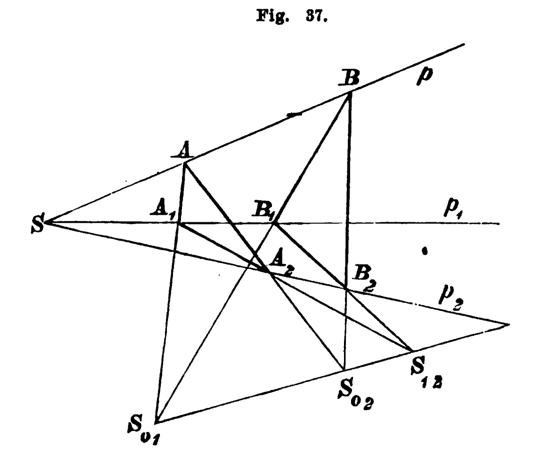
Ist S_{01} das Projectionscentrum von pp_1
S_{12} p_1p_2
S_{20} p_2p

so ziehe man $S_{01}S_{12}$, welche p_1 in F_1 schneidet, p aber in dem homologen Punkte F und p_2 in dem homologen F_2. Da nun nach der Voraussetzung p und p_2 perspectivisch liegen, so liegt auch S_{20} auf FF_2.

Lässt man (Fig. 37) ein Dreieck AA_1A_2 auf drei festen, sich in einem Punkte schneidenden Geraden so hingleiten, dass seine Seiten AA_1, A_1A_2 immer durch zwei feste Punkte S_{01}, S_{12} sich drehen, so wird sich seine dritte Seite AA_2 um einen festen Punkt S_{02} drehen, der mit $S_{01}\,S_{12}$ in einer Geraden liegt.

Denn es beschreiben bei dieser Drehung A und A_2 Punktreihen, welche mit den von A_1 beschriebenen Reihen projectivisch sind und sich in einem Punkte schneiden, der in allen drei Reihen der homologe ist.

Fig. 37.



Fixirt man das Dreieck in zwei seiner Lagen, so erhält man den Satz:

Die drei Durchschnitte entsprechender Seiten zweier Dreiecke, deren Ecken sich auf drei von einem Punkte S ausgehenden Geraden befinden, liegen auf einer Geraden.*)

Das ist der berühmte Satz des Desargues, der noch eine eingehende Betrachtung verdient.

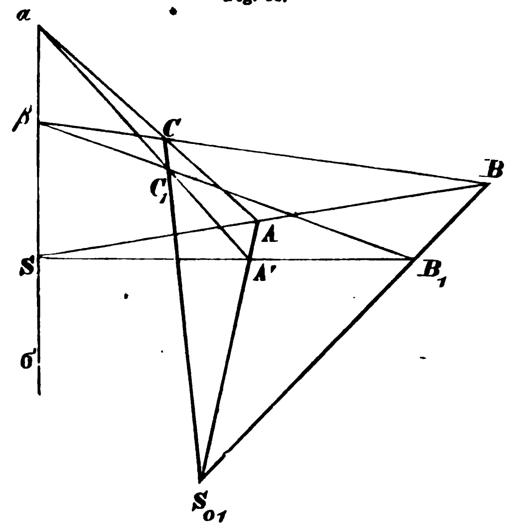
Er kann zunächst durch eine anschauliche räumliche Construction einfach erwiesen werden.

Man nehme auf einer beliebig durch S gelegten Geraden σ, die nicht in der Ebene $p p_1 p_2$ liegt, zwei willkührliche Punkte α, β an, construire über $A A_1 A_2$ das Dreikant mit der Spitze α, das Dreikant $B B_1 B_2$ mit der Spitze β. Da (Fig. 38) αA mit βB in einer Ebene liegt (nämlich in der durch σ und p gehenden), so schneiden sie sich in einem Punkte C. Ebenso schneiden sich αA_1 und βB_1 in C_1, αA_2 und βB_2 in C_2. Es liegen nun in einer Ebene $A A_1$ mit $C C_1$ und ebenso $B B_1$ mit $C C_1$, die drei Linien $A A_1$, $B B_1$, $C C_1$ werden also in einem

*) Siehe Einleitung pag. 9.

Punkte S_{01} zusammenlaufen; ebenso $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ in S_{12}, AA_2; BB_2, CC_2 in S_{02}. Diese drei Punkte liegen sämmtlich

Fig. 38.



in der Ebene $AA_1 A_2 BB_1 B_2$, aber auch in der durch die drei Punkte $CC_1 C_2$ gelegten Ebene; sie liegen also in der Durchschnittslinie beider Ebenen, q. e. d.

Es kann ebenso die Umkehrung des Satzes von Desargues, die zugleich seine duale Transformation ist, erwiesen werden.

Schneiden sich die entsprechenden Seiten zweier Dreiecke in drei Punkten, welche in gerader Linie liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken in einem Punkte.

Beweis. Es heisse die betreffende Linie, auf welcher die drei Durchschnitte liegen, s; man lege durch sie eine beliebige Ebene Σ und projicire von einem Punkte α aus das Dreieck $AA_1 A_2$ auf dieselbe, so dass man in Σ das Dreieck $CC_1 C_2$ erhält. Da sich dessen Seiten mit denen von $BB_1 B_2$ in den gegebenen Punkten S_{01} S_{12} S_{2}, schneiden, also mit diesen je in einer Ebene liegen, so gibt es ein Dreikant, in welchem $BB_1 B_2$ und $CC_1 C_2$ liegen, dessen Spitze β heisse. Legt man nun von $\alpha\beta$ eine Ebene durch C, so enthält diese auch AB; eine ebensolche Ebene von $\alpha\beta$ nach C_1 und C_2

gelegt schneidet die Ebene $AA_1A_2\,BB_1B_2$ in den Verbindungslinien entsprechender Ecken. Alle jene drei Ebenen aber haben die Gerade $\alpha\beta$ mit einander gemein, und wenn sie durch $AA_1A_2BB_1B_2$ geschnitten werden, so müssen die drei Linien in dem Durchschnitte von $\alpha\beta$ mit dieser Ebene zusammenlaufen.

Ein noch viel einfacherer Beweis, der aber nicht auf unmittelbaren Lagenverhältnissen beruht, kann durch Projection gegeben werden; am kürzesten ergibt sich der zweite obiger Sätze folgendermaassen:

Man projicire die Figur so auf eine andere Ebene, dass die Gerade s in's Unendliche fällt. Dann haben wir zwei Dreiecke vor uns, deren Seiten parallel, die daher einander ähnlich sind, und von denen mittels elementarer Sätze leicht zu erweisen ist, dass sich die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkte schneiden.

An der Figur, welche den Desargues'schen Satz darstellt, treten noch eine Reihe merkwürdiger Beziehungen hervor. Der Satz selbst kann zunächst so ausgesprochen werden:

Schneiden sich die Linien

$$AA',\ BB',\ CC' \text{ in einem Punkte } S,$$

so liegen die Durchschnitte:

$$AB\cdot A'B' = \gamma,\quad BC\cdot B'C' = \alpha,\quad CA\cdot C'A' = \beta,$$

auf einer Geraden s. Mit demselben Rechte aber kann man jene Punkte zu den Dreiecken ABC', $A'B'C$ zusammenfassen und findet so, dass die Durchschnitte

$$AB\cdot A'B' = \gamma,\ BC'\cdot B'C = \alpha',\ C'A\cdot CA' = \beta,'$$

auf einer Geraden s' liegen. Ebenso liegen, wenn man die Dreiecke $AB'C$, $A'BC'$ zusammenfasst,

$$AB'\cdot A'B = \gamma',\quad B'C\cdot BC' = \alpha',\quad CA\cdot C'A' = \beta \text{ auf } s''$$

und, wenn $A'BC$, $AB'C'$ zusammengefasst werden

$$A'B\cdot AB' = \gamma',\quad BC\cdot B'C' = \alpha,\quad CA'\cdot C'A = \beta' \text{ auf } s'''.$$

Es bilden demnach diese 4 Linien $ss's''s'''$, welche sich in den 6 Punkten $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ schneiden, ein vollständiges Vierseit.

Dieselbe Figur und derselbe Satz kann aber, wenn wir $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $A'B' = c'$, $B'C' = a'$, $C'A' = b'$ setzen, folgendermaassen aufgefasst werden:

Wenn die Durchschnitte

$$aa',\ bb',\ cc'$$

auf einer Geraden s liegen, so schneiden sich

$$ab-a'b',\ bc-b'c',\ ca-c'a'$$

in einem Punkte S. Daraus folgt sogleich, dass sich auch:

$$ab-a'b',\ b'c-bc',\ c'a-ca' \text{ in einem Punkte } S'$$
$$ab'-a'b,\ b'c-bc',\ ca-c'a' \quad " \quad " \quad " \quad S''$$
$$a'b-ab',\ bc-b'c',\ ca'-c'a \quad " \quad " \quad " \quad S'''$$

schneiden, und diese 4 Punkte $SS'S''S'''$ bilden ein Viereck.

Noch nach einer anderen Seite hin gestattet die Figur eine Erweiterung.

Denken wir uns auf drei in einen Punkt S zusammenlaufenden Geraden drei Dreiecke $ABC, A'B'C', A''B''C''$, deren Seiten $abc, a'b'c', a''b''c''$ heissen mögen, so liegen:

$$aa' \quad bb' \quad cc' \quad \text{auf } s_{01}$$
$$a'a'' \quad b'b'' \quad c'c'' \quad " \quad s_{12}$$
$$a''a \quad b''b \quad c''c \quad " \quad s_{20}$$

je auf einer Geraden. Diese drei Linien aber schneiden sich wieder in einem Punkte Q.

Denn betrachten wir die beiden Dreiecke

$$aa'a'' \text{ und } bb'b'',$$

so liegen die Durchschnitte entsprechender Seiten:

$$ab=C,\ a'b'=C',\ a''b''=C''$$

nach der Voraussetzung auf einer Geraden, es schneiden sich also die Verbindungslinien entsprechender Ecken, d. h. die Linien:

$$aa'-bb',\ a'a''-b'b'',\ a''a-b''b$$

in einem Punkte; das sind aber eben jene drei Linien s_{01}, s_{12}, s_{20}.*)

Von den vielen Anwendungen, die man von dem Theoreme des Desargues zum Beweise selbst einfacher Sätze machen kann, mögen nur folgende hier erwähnt werden:

Man nenne $A'B'C'$ drei auf einer Seite liegende Ecken eines vollständigen Vierseits, und $A''B''C''$ die drei nicht

*) Hesse, Crelle's Journ. Bd. 41. p. 270.

in gerader Linie liegenden Ecken, ABC die drei Durchschnitte der Diagonalen. Dann beziehe man die Dreiecke

$$ABC, \quad A''B''C''$$

aufeinander; es liegen die drei Durchschnitte entsprechender Seiten

$$AB \cdot A''B'' = C', \quad BC \cdot B''C'' = A', \quad CA \cdot C''A'' = B'$$

in gerader Linie, also schneiden sich:

$$AA'', \quad BB'', \quad CC''$$

in einem Punkte u. s. w. Das ist aber ein schon früher mittels der Dreiecksschnitte bewiesener Satz (Abschn. I. §. 4).

Ich erinnere ferner an den Satz (Abschn. I. §. 5):

Zieht man durch einen beliebigen Punkt der einen Diagonale eines Vierecks F_1 zwei Transversalen, so bestimmen diese auf den Seiten des Vierecks ein Viereck $E_1E_2E_3E_4$, dessen Seiten E_1E_4, E_2E_3 sich auf der anderen Diagonale schneiden.

Dieser Satz ist eigentlich nur ein anderer Ausdruck des Satzes von Desargues, wenn man diesen auf die Dreiecke $E_1A_2E_2$, $E_4A_4E_3$ bezieht, deren gegenüberliegende Seiten sich in A_1A_3F, also in drei auf einer Geraden liegenden Punkten schneiden; also gehen E_1E_4, A_2A_4, E_2E_3 durch einen Punkt.

Der obige Satz von den Projectionscentren dreier perspectivischen Geraden lässt sich so verallgemeinern:

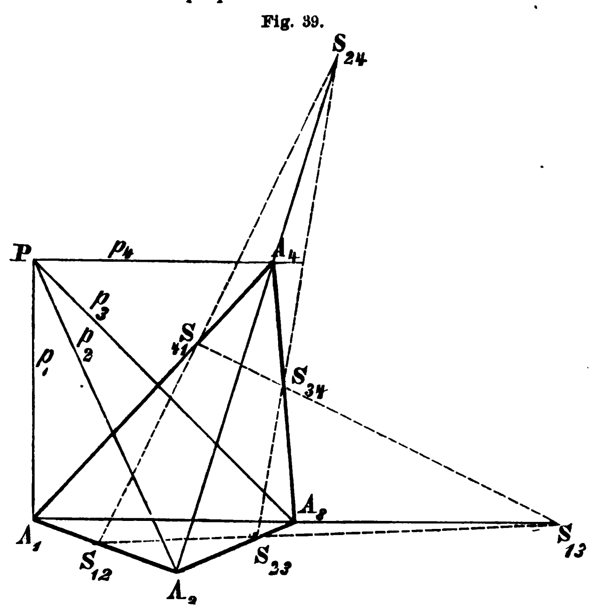
Wenn von mehreren, sich in einem Punkte P schneidenden Geraden $pp_1p_2\ldots$ jede mit der folgenden projectivisch ist und perspectivisch liegt, so sind sie alle unter einander projectivisch und liegen perspectivisch, so dass ihr Durchschnitt P in allen Geraden der homologe ist. Die zu je drei Geraden pp_1p_2 gehörigen Projectionscentra befinden sich jedesmal in einer Geraden.

Hievon lässt sich sogleich folgende Anwendung machen: Porisma des Pappus. (Coll. math. lib. VII. praef.)

Bewegen sich die 4 Ecken $A_1A_2A_3A_4$ eines Vierecks auf 4 durch einen Punkt P gehenden Geraden $p_1p_2p_3p_4$ und drehen sich 3 Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 um feste Punkte S_{12}, S_{23}, S_{34}, so dreht sich auch die vierte Seite A_4A_1 um einen festen Punkt S_{41}. (Fig. 39.)

Es beschreiben nämlich die Ecken $A_1 A_2 A_3 A_4$ auf den Linien $p_1 p_2 p_3 p_4$ projectivische Punktreihen, deren homologer Punkt P ist; sie liegen demnach alle perspectivisch, also schneiden sich alle $A_4 A_1$ in einem Punkte.

Fig. 39.



Man kann noch weiter bemerken, dass, weil auch $p_1 p_3$ perspectivisch sind, auch $A_1 A_3$ immer durch einen Punkt S_{13} gehen, der überdem mit S_{12}, S_{23} in einer Geraden liegt. Also:

Bewegen sich die 4 Ecken eines vollständigen Vierecks $A_1 A_2 A_3 A_4$ auf 4 durch einen Punkt gehenden Geraden, und drehen sich drei (nicht durch einen Punkt gehende) Seiten des Vierecks $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ um feste Punkte S_{12}, S_{23}, S_{34}, so drehen sich auch die drei anderen Seiten $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, $A_1 A_4$ um feste Punkte S_{13}, S_{24}, S_{14}. Diese 6 Punkte S liegen zu je drei auf einer Geraden, nämlich in folgender Anordnung:

$$\begin{matrix} S_{12} & S_{23} & S_{13} \\ S_{23} & S_{34} & S_{24} \\ S_{34} & S_{41} & S_{31} \\ S_{41} & S_{12} & S_{42} \end{matrix}$$

sie bilden also die 6 Ecken eines vollständigen Vierseites, wonach sie lineal zu construiren sind.

Der Satz kann ohne Weiteres auf ein n Eck erweitert werden. — Der duale heisst:

Drehen sich die Seiten eines vollständigen n Seits um n feste Punkte, die in einer Geraden liegen, und bewegen sich $(n-1)$ Ecken desselben, die einem einfachen n Eck angehören, in ebenso vielen festen Geraden, so bewegen sich auch die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ anderen Ecken in festen Geraden, die sich mit der gegebenen Geraden zu je drei in einem Punkte schneiden*).

Wir haben bisher drei projectivische Gerade betrachtet, welche sich in einem Punkte schneiden und gegen einander perspectivisch liegen; ihre drei Projectionscentra lagen dann in gerader Linie.

Betrachten wir jetzt drei projectivische Gerade a, b, c, welche ein Dreieck ABC mit einander bilden, und welche zu je zwei perspectivisch liegen, so dass die Ecken ABC homologe Punkte der sich in ihnen schneidenden Geraden sind. Es wird behauptet, dass in diesem Falle die drei Projectionscentra je zweier Geraden $A'B'C'$ ein dem ABC umschriebenes Dreieck bilden.

Beweis: Zweien homologen Punkten auf a und b entspricht derselbe Punkt auf c. Nun ist aber C ein homologer Punkt von a und b, verbindet man also C mit den resp. Projectionscentren A' von bc und B' von ac, so muss man denselben Punkt auf c finden; es muss also $A'C$ mit $B'C$ zusammenfallen, d. h. C muss auf $A'B'$ liegen, oder das Dreieck $A'B'C'$ dem ABC umschrieben sein.

Solche projectivische Punktreihen, wie sie hier verlangt wurden, sind aber leicht zu construiren. Man denke sich auf c einen Punkt γ beweglich, verbinde diesen mit 2 Punkten $A'B'$, welche mit C in gerader Linie liegen. Die Durchschnitte α, β, welche man so auf a, b erhält, bilden mit γ perspectivische Punktreihen, ebenso aber sind sie auch unter sich perspectivisch; denn ihr Durchschnitt C entspricht, mag man ihn als Punkt von a oder b ansehen, demselben Punkte in der Punktreihe γ, nämlich dem Durchschnitte

*) Steiner, syst. Entw. S. 81.

von $A'B'$ mit c. Wenn nun also die Punktreihen α, β perspectivisch liegen, so haben sie einen Projectionspunkt C', dessen Lage nun leicht zu bestimmen ist. Denn lässt man γ nach A rücken, so ist A selbst sein homologer Punkt auf b, der auf a homologe aber liegt auf dem Strahle $B'A$, so dass die Verbindungslinie der beiden homologen Punkte auf a und b, $B'A$ ist; diese aber geht durch das Projectionscentrum. Ebenso findet man, indem man γ nach B rücken lässt, dass das Projectionscentrum auf $A'B$ liegt. Dasselbe C' bildet also die Ecke des Dreiecks $A'B'C'$. Hieraus folgt der Satz:

Ist $A'B'C'$ dem ABC umschrieben und bewegt sich ein dem ABC eingeschriebenes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ so, dass zwei seiner Seiten durch zwei Ecken $A'B'$ des umschriebenen Dreiecks gehen, so geht auch immer die dritte Seite von $\alpha\beta\gamma$ durch die dritte Ecke C'.

Oder: Ist $A'B'C'$ dem ABC umschrieben, so gibt es immer unendlich viele Dreiecke, welche dem ABC eingeschrieben und dem $A'B'C'$ umschrieben sind.*)

§. 4.

Metrische Beziehungen projectivischer Gebilde.

Sind $ABCP \barwedge A'B'C'P'$, so ist:

$$\frac{AP}{PB} : \frac{AC}{CB} = \frac{A'P'}{P'B'} : \frac{A'C'}{C'B'}$$

also, wenn wir uns P und seinen homologen Punkt P' veränderlich denken:

$$1) \qquad \frac{AP}{PB} = \varrho \cdot \frac{A'P'}{P'B'}.$$

Umgekehrt: Wenn zwei bewegliche Punkte P, P' die festen Strecken $AB, A'B'$ auf zwei Geraden in Verhältnissen theilen, deren Quotient stets constant ist, so beschreiben sie projectivische Punktreihen.

Denn wenn Q, Q' zwei auf diese Weise beschriebene homologe Punkte sind, so ist:

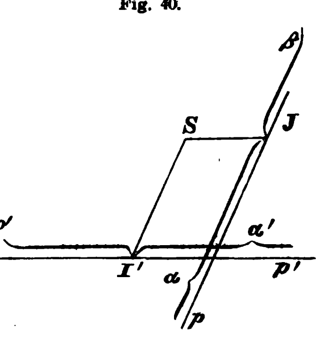
$$\frac{AP}{PB} = \varrho \frac{A'P'}{P'B'}, \quad \frac{AQ}{QB} = \varrho \frac{A'Q'}{Q'B'}$$

also $(ABPQ) = (A'B'P'Q')$.

*) Steiner, syst. Entw. S. 85.

Unter allen Punkten einer Geraden zeichnet sich der unendlich entfernte aus. Nennen wir denselben I bei der Geraden p, so entspricht ihm in der projectivischen Geraden p' ein Punkt I', der im Allgemeinen im Endlichen gelegen ist und der Fluchtpunkt (Gegenpunkt nach Möbius) genannt wird. Nennen wir J' den unendlich entfernten Punkt der Geraden p', so entspricht diesem auf p der Fluchtpunkt J. Diese beiden Punkte theilen nun die Geraden in je zwei Hälften, die sich gegenseitig entsprechen. So liegen in beistehender Figur alle den Punkten in α homologen Punkte in α', alle den β homologen in β'. Dabei mag nochmals ausdrücklich bemerkt werden, dass, wenn ein Punkt die Gerade p stetig und in einerlei Sinne durchläuft, auch der homologe Punkt P' die p' stetig und in einerlei Sinne durchläuft, so dass, wenn er auf der einen Seite in's Unendliche hinausgegangen ist, er auf der anderen Seite wieder hereinkommt.

Fig. 40.



Es ist nun:

$$(PQIJ) = (P'Q'I'J') \text{ also: } 1 : \frac{PJ}{JQ} = \frac{P'I'}{I'Q'}$$

oder

$$JP \,.\, I'P' = JQ \,.\, I'Q' = \text{const.} = \pi. \qquad 2)$$

Das Product der Entfernungen homologer Punkte von den Fluchtpunkten ist constant. Nach Steiner nennt man dieses Product π die Potenz der projectivischen Beziehungen.

Umgekehrt: Wenn sich zwei Punkte P, P' auf zwei Geraden p, p' so bewegen, dass das Product ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten derselben J und I' constant ist, so theilen sie die Geraden projectivisch und es sind J, I' die Fluchtpunkte.

Bezeichnen A, B' zwei beliebige Punkte resp. der Geraden p, p', auf denen sich projectivische Punktreihen befinden, so ist:

$JP.I'P' = \pi$, also auch $(JA + AP)(I'B' + B'P') = \pi$.

3) $AP.B'P' + \lambda' AP + \lambda B'P' + \mu = o$, wenn

$\lambda' = I'B'$, $\lambda = JA$, $\mu = \lambda\lambda' - \pi$ gesetzt wird.

Ist $B' = A'$, werden also die Entfernungen von homologen Punkten aus gerechnet, so wird $\mu = o$ und man erhält die Relation

3a) $$1 = \frac{A'I'}{A'P'} + \frac{AJ}{AP}.$$

Die Entfernungen projectivischer Punkte x, x' von beliebigen Punkten ihrer Geraden aus gerechnet, stehen nach Gl. 3) in der Beziehung zu einander:

$$xx' + \lambda' x + \lambda x' + \mu = o.$$

Von dieser Eigenschaft projectivischer Punktreihen ging Möbius aus, und definirte:

Unter projectivischer (collinearer) Verwandtschaft zweier Punktreihen verstehe ich eine solche, bei welcher jedem Punkte der einen ein einziger Punkt der anderen entspricht, und umgekehrt.

Bedeuten also x, x' die von beliebigen Punkten der Geraden aus gemessenen Entfernungen homologer Punkte, so müssen x, x' in derjenigen analytischen Beziehung zu einander stehen, dass jedem x ein x', jedem x' ein x entspricht; es muss also sowohl x wie x' durch eine Gleichung ersten Grades in der anderen Veränderlichen ausgedrückt werden können, d. h. es muss

$$xx' + \lambda' x + \lambda x' + \mu = o$$

sein, wo λ, λ', μ drei beliebige Constanten sind, welche die metrischen Verhältnisse beider Punktreihen näher determiniren.

Aus dieser Definition lassen sich nun mit Leichtigkeit alle vorstehenden Eigenschaften ableiten.

Da x eine gebrochene Function ersten Grades von x', so muss auch jede gebrochene Function ersten Grades von x eine solche von x' sein. Bilden wir nun den Ausdruck $\frac{x-a}{x-b}$ und bezeichnen die rechte Seite, welche sich durch die Substitution:

$$x = -\frac{\mu + \lambda x'}{\lambda' + x'}$$

ergibt, mit $\varrho \frac{x'-a'}{x'-b'}$, so entspricht zufolge der Gleichung:

$$\frac{x-a}{x-b} = \varrho \frac{x'-a'}{x'-b'}$$

dem Punkte $x = a$ der Punkt $x' = a'$, ebenso dem Punkte $x = b$, $x' = b'$. Es bedeuten a', b' die Abscissen von Punkten, welche homolog zu a, b sind. Vorstehende Gleichung besagt demnach die bekannte Relation:

$$\frac{AX}{XB} = \varrho \frac{A'X'}{X'B'}.$$

Bei ähnlichen, d. h. bei solchen projectivischen Reihen, deren unendlich entfernte Punkte sich entsprechen, hat man sofort aus: $(ABPI) = (A'B'P'I')$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'}, \quad AP = \varkappa A'P'$$

oder

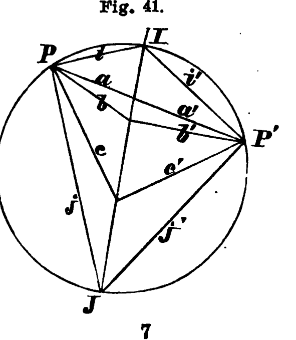
$$AP = \varkappa \,.\, B'P' + \mu,$$

welche Gleichung in obiger allgemeiner zwischen $AP, B'P'$ enthalten ist, wenn I' und J in's Unendliche rücken.

Obgleich es in einem Strahlenbüschel keinen Strahl gibt, der sich in ähnlicher Weise unter allen auszeichnet, wie unter allen Punkten der unendlich entfernte auf der Geraden, so gibt es doch in projectivischen Strahlenbüscheln Paare homologer Strahlen ij, $i'j'$, welche eine ganz ähnliche Rolle in der Theorie dieser spielen, wie die Punktpaare $IJ, I'J'$ für die Punktreihen.

Es gibt nämlich in zwei projectivischen Strahlenbüscheln stets **zwei Paare** i, i', j, j' **homologer Strahlen**, welche **rechte Winkel** mit einander bilden; es gibt, kurz gesagt, **zwei einander homologe rechte Winkel.**

Fig. 41.



Denken wir uns die beiden Büschel P, P' in perspectivische Lage gebracht, indem wir etwa a mit a' zusammenfallen lassen, so schneiden sich alle entsprechenden Strahlen auf einer Geraden s. Legt man nun durch P, P' einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf s liegt, so werden die Durchschnitte IJ des Kreises mit s, wenn sie mit P, P' verbunden werden,

homologe Strahlen i, j, i', j' geben, so dass ij und $i'j'$ rechte Winkel werden.

Setzen wir $ij = \frac{\pi}{2}$, $i'j' = \frac{\pi}{2}$, so ist:

$$\frac{\sin ip}{\sin pj} = \cot pj, \quad \frac{\sin i'p'}{\sin p'j'} = \tan i'p',$$

also, da $(ijpq) = (i'j'p'q')$,

$$\frac{\cot pj}{\cot qj} = \frac{\tan i'p'}{\tan i'q'}$$

oder auch

4) $$\tan jp \tan i'p' = \text{const.}$$

Es kann dieser wichtige Satz von der Existenz dieser Strahlen auch rechnend folgendermaassen begründet werden: Da, wie bekannt (Abschn. I, §. 2, Gleich. 9),

$$(abcd) = \frac{\cot ad - \cot ab}{\cot ac - \cot ab},$$

so kann man aus $(abcp) = (a'b'c'p')$ sofort erfahren, dass zwischen homologen Winkeln die Relation

5) $$\lambda \cot ap + \lambda' \cot a'p' + 1 = 0$$

besteht. Will man die Winkel von verschiedenen Strahlen aus rechnen, so setze man

$$\cot a'p' = \cot(a'b' + b'p') = \frac{1 - \tan a'b' \tan b'p'}{\tan a'b' + \tan b'p'}$$

und erhält so die allgemeine Relation:

6) $$\tan ap \tan b'p' + \lambda' \tan ap + \lambda \tan b'p' + \mu = 0$$

worin, wenn α den zu a normalen Strahl, β' den zu b' normalen bezeichnet, α' und β aber deren homologe in dem anderen Büschel:

$$\lambda' = -\tan b'\alpha', \quad \lambda = -\tan \alpha\beta, \quad \mu = \tan \alpha\beta \tan b'\alpha'.$$

Bleiben wir jedoch jetzt bei der Formel 5).

Bezeichnet q einen anderen Strahl, für den also die Gleichung $\lambda \cot aq + \lambda' \cot a'q' + 1 = 0$ besteht, jedoch einen solchen, dass $pq = \frac{\pi}{2}$, $p'q' = \frac{\pi}{2}$, so verwandelt sich vorstehende Gleichung in:

7) $$-\frac{\lambda}{\cot ap} - \frac{\lambda'}{\cot a'p'} + 1 = 0.$$

Eliminirt man nun aus (5), (7) die $\cot a'p'$, so erhält man zur Bestimmung von $\cot ap$ die Gleichung:

$$(1 + \lambda \cot ap)\left(1 - \frac{\lambda}{\cot ap}\right) = -\lambda'^2 \qquad 8)$$

welche, wie man leicht sieht, stets reelle Wurzeln hat, die so beschaffen sind, dass, wenn $\cot ap = x$ die eine ist, die andere $-\frac{1}{x}$ ist. Es sind also die beiden Strahlen, welche diesen Wurzeln entsprechen, auf einander senkrecht. *q.e.d.*

§. 5.

Aufeinanderliegende projectivische Gebilde. Die Doppel-Elemente und deren Construction.

Wenn die Träger zweier projectivischer Punktreihen zusammenfallen, also auf einer Geraden zwei projectivische Punktreihen p, p' liegen, so liegen im Allgemeinen in Einem Punkte der Geraden zwei nicht homologe Punkte vereinigt, und jedem solchen Punkte kommt eine doppelte Bezeichnung zu, einmal als Punkt der Reihe p, das anderemal als Punkt der Reihe p'. Gibt es nun Punkte der Geraden, in denen zwei homologe Punkte vereinigt sind, sich selbst homologe Doppelpunkte?

Wir unterscheiden zunächst die beiden Fälle, ob die beiden vereinigten Geraden gleich oder entgegengesetzt laufen. Wie man hierüber zu entscheiden hat, wenn die stetigen Punktreihen gegeben sind, versteht sich von selbst. Sind aber nur drei homologe Paare von Punkten ABC, $A'B'C'$ gegeben, so gehe man von A nach B, ohne C zu berühren, wenn man auch durch das Unendliche geführt wird, in einem Sinne fort; ebenso von A' nach B', ohne C' zu berühren. Je nachdem nun der letztere Sinn dem ersteren gleich oder entgegengesetzt ist, hat man gleiche oder entgegengesetzte Punktreihen.

I. Wenn die beiden Punktreihen in entgegengesetztem Sinne von homologen Punkten durchlaufen werden, so wird, wenn P von J nach links bis ∞ läuft, P' links von ∞ aus bis I' hereinlaufen und es ist klar, dass, mag nun I' links oder rechts von J liegen, sich die beiden homologen Punkte einmal auf der linken Seite von J und I' begegnen müssen; es gibt also ausserhalb der Strecke JI' einen Doppelpunkt E. Läuft ferner P von ∞ nach links bis nach J, so

geht P' von I' nach rechts zu bis ∞. Es gibt also auch rechter Hand von der Strecke JI' einen Doppelpunkt F.

Diese beiden reellen Doppelpunkte, die einzigen, welche in dem System vorkommen, liegen symmetrisch zu beiden Seiten der Strecke JI'. Denn in unserem Falle, wo $JP, I'P'$ gleichen Zeichens sind, ist die Potenz π positiv

$$JP \,.\, I'P' = \pi = q^2.$$

Wenn daher E ein Doppelpunkt, also

$$JE \,.\, I'E = q^2$$

so ist auch F ein Doppelpunkt, wenn $I'E = FJ$ und $JE = FI'$, weil auch dann

$$JF \,.\, I'F = q^2.$$

Oder kürzer: Es stehen E und F von dem Mittelpunkte zwischen J, I', dem Mittelpunkte O des Systems, gleich weit ab. Nehmen wir diesen überhaupt zum Anfangspunkt der Strecken, so werden homologe Punkte bestimmt aus:

$$OP \,.\, OP' - OJ \,.\, PP' = q^2 + \overline{OJ}^2$$

also die Doppelpunkte E, F aus:

$$\overline{OE}^2 = \overline{OF}^2 = q^2 + \overline{OJ}^2.$$

Danach könnte man sie auch leicht construiren. Denn sind die Punkte JI' gefunden, also auch O, ist ferner $q = \sqrt{JP \,.\, I'P'}$ mittels irgend zweier homologer Punkte P, P' dargestellt, so errichte man in J ein Perpendikel von der Länge q und beschreibe durch dessen Spitze von O aus einen Kreis; derselbe wird die Gerade pp' in E, F schneiden.

II. Laufen homologe Punkte in beiden Geraden in gleicher Richtung, so können homologe Punkte, wie man leicht sieht, nur in der Strecke JI' zusammentreffen. Wenn der Punkt P von J nach rechts läuft, so läuft P' von ∞ nach rechts, und wird seinen homologen Punkt P erreichen, wenn er so langsam läuft, dass dieser noch nicht über I' hinausgegangen ist, während P' seinen unendlichen Weg von ∞ bis I' zurücklegt. Läuft dagegen Punkt P rascher auf seiner Bahn, so wird er von P' nicht mehr eingeholt werden.

Die Bedingungen, ob der eine oder andere dieser Fälle eintritt, lassen sich leicht so formuliren.

Wenn die beiden zusammengelegten Geraden gleichen Sinnes sind, so ist die Potenz $JP.I'P'$ negativ:

$$JP.I'P' = -q^2$$

und, wenn O die Mitte von JI' bedeutet:

$$OP.OP' - OJ.PP' = \overline{OJ}^2 - q^2$$

also, wenn E einen Doppelpunkt bezeichnet:

$$\overline{OE}^2 = \overline{OF}^2 = \overline{OJ}^2 - q^2.$$

Es gibt also hier zwei reelle Doppelpunkte, wenn

$$OJ > q,$$

die man leicht, auf ähnliche Weise wie zuvor, construiren kann mittels eines Kreises, den man von O als Mittelpunkt durch J, I' beschreibt und auf dessen senkrechten Durchmesser man q abträgt.*) —

Ist aber $OJ < q$, so gibt es keine reellen Doppelpunkte, sie sind imaginär geworden. Was für eine eigenthümliche Beziehung die beiden Punktreihen dann zu einander besitzen, wird weiter unten erörtert werden.

Sind drei homologe Punktpaare gegeben ABC und $A'B'C'$ und ist deren Sinn einstimmig, so sind es die beiden Punktreihen überhaupt. Ob aber die Doppelpunkte reell sind, kann man nach der Lage dieser Punkte allein nicht ohne weiteres in jedem Falle entscheiden. Nur wenn es sich trifft, dass eine Strecke AB ganz innerhalb einer homologen A_1B_1 liegt, leuchtet ein, dass dann die Doppelpunkte reell sein müssen. Ist aber unter den

---

*) Da allgemein $\frac{AP}{PB} = n\frac{A'P'}{P'B'}$, so hat man für die Doppelpunkte $\frac{EP}{PF} : \frac{EP'}{P'F} = n$, $(EFPP') = n$; homologe Punkte theilen die Entfernung ihrer Doppelpunkte in einem constanten Doppelverhältniss. Man hat hieraus nach einem bekannten Satze (pag. 42, Gl. 2), indem man die Gleichungen des vorigen §. berücksichtigt, das Gleichungssystem:

$$\frac{n}{FP'} + \frac{1}{PF} = \frac{n-1}{FE} \quad \frac{FI'}{FP'} + \frac{JF}{PF} = 1 \quad \frac{EI'}{EP'} + \frac{JE}{PE} = 1,$$

wir werden dieselben später als für die Theorie der dioptrischen Bilder wichtig erkennen.

gegebenen Strecken solches nicht der Fall, so darf man zunächst daraus keine weiteren Schlüsse ziehen.

Aehnliche Punktreihen, bei denen $AP = \varkappa A'P'$, also $AP = \varkappa AP' + \varkappa A'A$, haben stets einen reellen Doppelpunkt F im Endlichen, als zweiten den unendlich fernen Punkt der Geraden. Demnach erhält man den Satz: Zwei projectivische Punktreihen auf einer Geraden mit reellen Doppelpunkten können stets angesehen werden als reelle Projectionen ähnlicher Punktreihen auf einer Geraden, und zwar gleichlaufender, wenn sie selbst gleichlaufend sind, und entgegengesetzt ähnlicher Punktreihen, wenn sie es selbst sind.

Wenn die Mittelpunkte P, P' zweier projectivischer Strahlenbüschel zusammenfallen, so können dieselben Fragen, die wir eben für zwei Punktreihen auf einer Geraden behandelt haben, von neuem gestellt werden; doch bedürfen dieselben nunmehr keiner besonderen Untersuchung. Denn schneiden wir die beiden Büschel durch eine Gerade, so erhalten wir auf dieser zwei projectivische Punktreihen, die gleich oder entgegengesetzt laufen, je nachdem für die Büschel gleicher oder entgegengesetzter Drehungssinn besteht. Demnach lassen sich ohne weiteres die Sätze ableiten:

Zwei projectivische Büschel in einem Punkte haben stets zwei reelle Doppelstrahlen, wenn sie entgegengesetzten Sinnes sind, wenn sie aber gleichen Sinnes sind, so werden die Doppel-Elemente nur unter einer gewissen Bedingung reell, falls diese nicht erfüllt ist, imaginär. Dann aber kann das System immer als die Projection eines Systemes von zwei ähnlichen (oder congruenten) Büscheln, deren Mittelpunkte vereinigt liegen, angesehen werden.

Wir haben gezeigt, wie die metrische Beziehung zweier projectivischer Punktreihen auf einer Geraden am allgemeinsten durch eine Gleichung:

$$AP \, . \, AP' + \lambda AP' + \lambda' AP + \mu = 0$$

ausgedrückt wird, wo P, P' homologe Punkte, A ein beliebiger Anfangspunkt ist. Die Doppelpunkte werden dann durch:

$$\overline{AE}^2 + (\lambda + \lambda') AE + \mu = 0$$

also einer quadratischen Gleichung allgemeiner Form dargestellt. Ueberall da also, wo sich geometrisch ein Paar von Punkten E, F auf einer Geraden als Doppelpunkte projectivischer Punktreihen bestimmt, tritt bei algebraischer Behandlung eine quadratische Gleichung auf.

Und umgekehrt: Wenn sich bei algebraischer Behandlung die Bestimmung eines Punktes E, oder seiner Entfernung von einem gegebenen Punkte A aus, zweideutig gestaltet, also auf eine quadratische Gleichung

$$\overline{AE}^2 + \varkappa AE + \mu = 0$$

führt, so kann man diesen Punkt geometrisch als Doppelpunkt zweier projectivischer Punktreihen:

$$AP \,.\, AP' + \lambda AP' + \lambda' AP + \mu = 0$$

bestimmen, wo $\lambda + \lambda' = \varkappa$. Man wird demnach so verfahren: Wenn man sagt: E solle aus gewissen Eigenschaften gefunden werden, so heisst das: Wenn man von E ausgehend eine gewisse Construction ausführt, so soll man wieder zu E zurückkommen. Wenn man nun dieselbe Construction auf einen beliebigen Punkt P der Geraden anwendet, so wird man im Allgemeinen nicht zu demselben, sondern zu einem anderen Punkte P' zurückkommen. So erhält man zu jedem P ein entsprechendes P'; der gesuchte Punkt E wird aber ein Doppelpunkt dieser beiden Punktreihen sein müssen. Uebersteigt nun die Aufgabe überhaupt nicht die Kräfte der Elementargeometrie, d. h. ist sie mit Hilfe des Lineals und Cirkels, linearer und quadratischer Gleichungen lösbar, so werden jene Punktreihen projectivische sein müssen.

Es wird aber im Allgemeinen möglich sein, verschiedene projectivische Punktreihen zu finden, deren Doppelpunkte die bestimmten Punkte E und F sind; denn letztere werden immer dieselben sein, wenn in

$$AP \,.\, AP' + \lambda AP' + \lambda' AP + \mu = 0$$

die beiden Constanten nur der einen Bedingung $\lambda + \lambda' = \varkappa$ genügen. So hat also der Geometer unter verschiedenen Annahmen die Wahl.

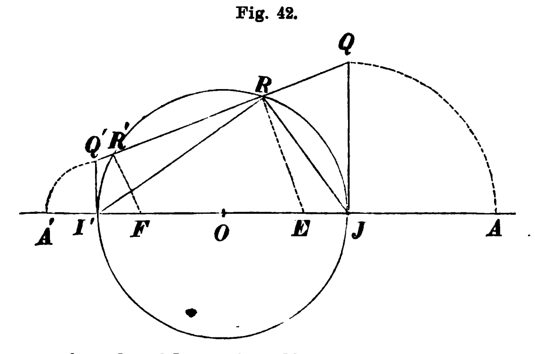
Um nun die Doppelpunkte zu bestimmen, kann man entweder ein probirendes Verfahren einschlagen, welches der näherungsweisen Auflösung quadratischer Gleichungen (der *regula falsi*) einigermaassen entspricht; nämlich die Lage des Punktes P so lange verändern, bis P' mit ihm zusammenfällt — oder man wendet eine bestimmte Construction an.

Ist die Länge q und sind die beiden Fluchtpunkte JI' gegeben, so genügt obige Construction.

Sind jedoch die Fluchtpunkte JI' und ein Paar homologer Punkte A, A' gegeben, so dass $JP \,.\, I'P' = JA \,.\, I'A'$, so wäre es unelegant erst durch eine besondere Construction $q = \sqrt{\pm JA \,.\, I'A'}$ zu bestimmen. Man wendet dann besser folgende schöne Construction der Doppelpunkte projectivischer Punktreihen an — eine Construction, welche in allen Fällen, wo die Doppelpunkte reell sind, dieselben in gleicher Weise liefert. (Fig. 42.)

Man beschreibe über JI' als Durchmesser einen Kreis, errichte in J und I' auf dem Durchmesser Perpendikel $JQ = JA$, $I'Q' = I'A'$, und zwar sollen $JQ, I'Q'$ entgegengesetzt liegen, wenn $JA, I'A'$ gleichgerichtet sind und umgekehrt sollen $JQ, I'Q'$ gleichgerichtet sein, wenn $JA, I'A'$ entgegengesetzt liegen. Dann ziehe man QQ', welche den

Fig. 42.



Kreis in R, R' schneidet; in diesen Punkten errichte man Perpendikel auf QQ' und es werden diese die Strecke JI' in den Doppelpunkten E, F schneiden.

Beweis: $Q'\widehat{I'}R = E\widehat{J}R$, $Q'\widehat{R}I' = J\widehat{R}E$ also: $\triangle Q'I'R \sim \triangle EJR$ also: $A'I' : I'R = EJ : JR$. Ferner $I'\widehat{R}E = J\widehat{R}Q$,

$R\widehat{I'}E = R\widehat{J}Q$ also: $\triangle JRQ \sim \triangle I'RE$ also: $AJ : JR = I'E : I'R$ und damit:

$$I'E \,.\, EJ = AJ \,.\, A'I'$$

wenn hier die Strecken absolut gerechnet werden. (Eine entsprechende Figur wie die nebenstehende, nur mit der Aenderung, dass $I'Q'$ und JQ nach entgegengesetzten Seiten von AA' liegen, ergibt sich, wenn $JA, I'A'$ gleichgerichtet sind.)

Constructionen dieser Art ersetzen den antiken Geometern die Auflösung quadratischer Gleichungen, die bei ihnen immer in der Form:

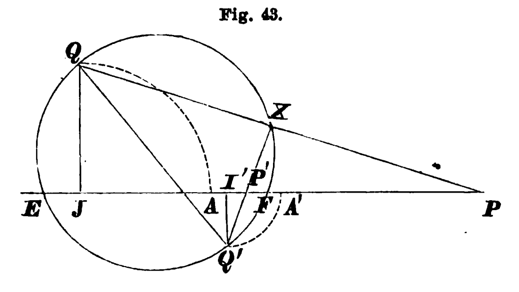
$$JE \,.\, EI' = JA \,.\, A'I'$$

erscheinen. Sie nennen diese Aufgabe, wenn der Punkt E ausserhalb liegt: An eine gegebene Gerade JI' ein Rechteck $JE \,.\, I'E$ von quadratischem Ueberschuss zu entwerfen, welches einem gegebenen Rechteck $JA \,.\, I'A'$ gleich sei *(applicare ad rectam datam rectangulum dato aequale, excedens quadrato)*. Soll ein Punkt E innerhalb gefunden werden, so heisst die Aufgabe: An eine gegebene Gerade JI' ein Rechteck $JE \,.\, EI'$ von quadratischer Ergänzung *(deficiens quadrato)* zu entwerfen, welches einem gegebenen Rechteck gleich sei.

Diese Aufgaben löst Euklid VI, 28, 29 auf eine wenig elegante Weise. Andere Lösungen, von eleganterem Charakter, worunter sich auch die vorige befindet, die vermuthlich auch antiken Ursprunges ist, siehe Paucker, Geom. Analysis, (1837); S. 13—17.

Unter diesen zeichnet sich eine aus, welche zugleich erlaubt, die homologen Punkte P' zu gegebenen P zu construiren. Fig.43.

Fig. 43.



Man trage, je nachdem $JA, I'A'$ gleich oder entgegen gerichtet sind, die gleichen Stre-

cken $JQ, I'Q'$ entweder nach entgegengesetzter oder gleicher Richtung senkrecht auf, beschreibe über QQ' als Durchmesser einen Kreis. Zieht man jetzt PQ, welche den Kreis in X schneidet, alsdann die Linie XQ', so trifft diese Linie den homologen Punkt P' auf AA'. Denn es ist:

$$PJ : JQ = PX : XP' = I'Q' : I'P'$$

also:

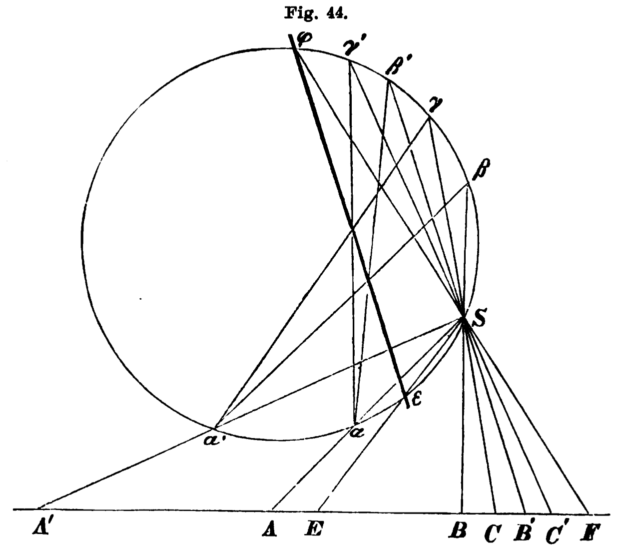
$$PJ \,.\, I'P' = JQ \,.\, I'Q' = \pm JA \,.\, I'A'.$$

Die Durchschnitte E, F des Kreises mit der Geraden sind die Doppelpunkte.

Eine noch allgemeinere Construction mittels eines beliebigen festen Kreises, um die homologen Punkte überhaupt, insbesondere aber die Doppelpunkte zu finden, wenn drei beliebige Paare $AA'\ BB'\ CC'$ homologer Punkte gegeben sind, hat Steiner erfunden*):

Man verbinde $ABCA'B'C'$ mit einem beliebigen Punkte S des Kreises durch Gerade, welche den Kreis nochmals in

Fig. 44.



$\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ schneiden. Dann ist das Büschel $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$... $\overline{\wedge}$ $S\alpha'$, $S\beta'$ $S\gamma'$... Da ferner die Winkel, welche die Geraden

*) Eine andere von Chasles angegebene siehe unten in der Lehre von der Involution.

$\alpha'\alpha$, $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$ ... miteinander bilden (wegen der gleichen Peripheriewinkel), denen, die $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$... miteinander machen, gleich sind, so ist $\alpha'\alpha, \alpha'\beta, \alpha'\gamma \ldots \overline{\wedge}\, S\alpha, S\beta, S\gamma \ldots$; ebenso $\alpha\alpha', \alpha\beta', \alpha\gamma' \ldots \overline{\wedge}\, S\alpha', S\beta', S\gamma' \ldots$, also auch $\alpha'\alpha, \alpha'\beta$ $\alpha'\gamma \ldots \overline{\wedge}\, \alpha\alpha', \alpha\beta', \alpha\gamma' \ldots$; und da die Mittelpunkte α, α' dieser beiden Büschel auf homologen Strahlen liegen, so schneiden sich alle die Strahlen $\alpha'\beta$, $\alpha\beta'$ und $\alpha'\gamma$, $\alpha\gamma'$, u. s. f. auf einer Geraden, die schon durch zwei dieser Durchschnitte bestimmt ist. Mit ihrer Hilfe kann man nun zu jedem Punkte D der Punktreihe ABC den homologen D' finden.

Diese Gerade aber schneidet den Kreis in ε und φ; da in dem Punkte ε zwei Punkte, nämlich die Durchschnitte $\alpha\varepsilon'$, $\alpha'\varepsilon$ vereinigt sind, so giebt $S\varepsilon$ auf der ursprünglichen Geraden den Doppelpunkt E an, ebenso liefert $S\varphi$ den zweiten Doppelpunkt F.

Liegt aber die Gerade $\varepsilon\varphi$, welche sich als Schein der projectivischen Büschel α und α' ergeben hat, ganz ausserhalb des Kreises, so dass keine reellen Punkte $\varepsilon\varphi$ auftreten, so erhalten wir auch keine reellen Doppel-Elemente.

Da zwei projectivische Punktreihen nur zwei Doppel-Elemente besitzen, so folgt, dass die nämliche Gerade $\varepsilon\varphi$ erhalten werden muss, falls statt α und α' die Punkte β und β', oder γ und γ' zu Mittelpunkten von Strahlbüscheln gewählt werden, ein Satz, der in der Theorie der Kegelschnitte fundamentale Bedeutung gewinnen wird.

Man erkennt leicht, wie alle diese Constructionen zugleich auch die Doppel-Elemente in zwei aufeinanderliegenden projectivischen Strahlbüscheln finden lassen..

§. 6.

Bedingungen für die Realität der Doppelpunkte.

Die Frage nach der Realität der Doppelpunkte ist eine so häufige und nothwendige, dass es gut ist, die Antwort auf mehrfache Weise zu formuliren. Wir haben eben gesehen:

Die Doppelpunkte sind jedesmal reell, wenn die Punktreihen entgegengesetzten Sinn haben; wenn sie aber einerlei Sinnes sind, so muss

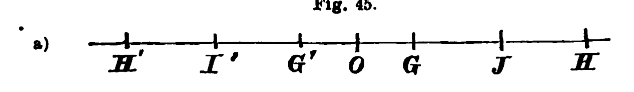
$$OJ = \tfrac{1}{2}\, I'J > q$$

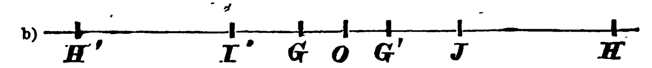
sein, wenn hierbei $JP \, . \, I'P' = -q^2$, und $I'J$, q positiv gerechnet wird. Diese letztere Bedingung hat Steiner in eine andere Form gebracht, indem er vier Punkte G, G', H, H' so bestimmte, dass

$$JH = H'I' = GJ = I'G' = q.$$

Diese von Steiner nicht bezeichneten Punkte nenne ich die Hauptpunkte, weil sie, wie wir später sehen werden, die optischen Hauptpunkte im Gauss'schen Sinne sind, wenn P, P' eine Reihe von Objecten und Bildern darstellt, gebildet von einem Linsensystem unter der Bedingung, dass die beiden äussersten Medien identisch sind.

Fig. 45.





Wenn nun $I'G' < I'O$, also auch $GJ < OJ$ ist, oder mit anderen Worten, wenn die Strecken $H'G', HG$ nicht in einander eingreifen, so sind die Doppelpunkte reell; im anderen Falle imaginär. Stossen sie an einander an, so dass G' mit G zusammenfällt, so sind beide Doppelpunkte in diesem Punkte vereinigt.

Dasselbe Resultat kann man auch, ohne über den positiven Sinn der Geraden oder das Zeichen von q eine Entscheidung zu geben (wobei denn entweder GG' oder HH' auf der Strecke $I'J$ liegen können) erhalten, wenn man ausgeht von der Bedingung für die Realität:

$$\overline{I'J}^2 > 4q^2, \quad (I'J - 2q)(I'J + 2q) > 0.$$

Nun ist
$$I'J - 2q = I'J + G'I' + JG = G'G$$
$$I'J + 2q = I'J + JH + H'I' = H'H.$$

Die Doppelpunkte sind also reell oder imaginär, je nachdem $G'G \, . \, H'H \gtrless 0.$ —

Wenn neben den Fluchtpunkten JI' nicht die Potenz selbst, sondern die homologen Punkte AA' gegeben sind, so kann man über die Realität folgendermaassen entscheiden.

Sind $JA, I'A'$ gleichgerichtet, so sind die Doppelpunkte immer reell. Sind aber $AJ, I'A'$ gleichgerichtet, so muss

$$\overline{I'J}^2 - 4\, AJ \,.\, I'A' > 0$$

sein. Diese Bedingung lässt sich leicht in eine andere umsetzen, welche nur die Strecken von A' aus enthält, nämlich:

$$(I'A' + A'J)^2 - 4\,(AA' + A'J)\; I'A' > 0$$

oder

$$(A'J + A'I')^2 - 4\, AA' \,.\, I'A' > 0.$$

Ist also AA' zu $I'A'$ entgegengesetzt, so ist diese Bedingung ohne weiteres erfüllt; wenn aber AA' und $I'A'$ gleichgerichtet, so muss eine eigentliche Grössenbedingung bestehen, nämlich

entweder $\quad A'J + A'I' > 2\sqrt{AA' \,.\, I'A'}$

oder $\quad A'J + A'I' < -2\sqrt{AA' \,.\, I'A'}.$

Es ist zweckmässig, diese Verhältnisse sich in der Anschauung klar zu machen, namentlich um zu erkennen, dass nur in diesem letzten Falle, dann aber gewiss, eine eigentliche Grössenbedingung nothwendig ist; wir wollen daher die verschiedenen Lagenbeziehungen noch etwas ausführlicher untersuchen.

I. Sind JA und $I'A'$ gleichgerichtet, so werden wegen

$$JE \,.\, I'E = JA \,.\, I'A'$$

auch $JE, I'E$ gleichgerichtet sein, daher E und ebenso F jedenfalls ausserhalb JI' liegen. Es kann somit das Rechteck $JE \,.\, I'E$, wenn E von J oder I' in's Unendliche läuft, jeden positiven Werth annehmen, und es sind daher die Doppelpunkte stets reell, wenn

$$JA \,.\, I'A' > 0,$$

Fig. 46.

a) F J A I' E A

b) F J I' A E A

c) F J I' A' E A

wie auch sonst die Punkte aufeinander folgen [s. Fig. (a), (b), (c) und andere Lagen].

II. Ist aber $JA \,.\, I'A' < 0$, so sind auch JE und $I'E$ entgegengesetzt gerichtet und es liegt E so wie F innerhalb JI'. Es müssen aber jetzt weiter die Fälle unter-

schieden werden, ob AA' mit $I'A'$ gleichgerichtet ist, oder nicht.

1. Ist $AA'.I'A' < 0$, so folgen diese drei Punkte in der Ordnung $AA'I'$, und da $I'A'$ mit AJ gleichgerichtet, die vier Punkte in der Ordnung $JAA'I'$. Das Rechteck $JA.A'I'$ ist daher jedenfalls kleiner als $JO.OI'$, wo O die Mitte bedeutet. Da nun $JE.EI'$, wenn E die Strecke JI' durchläuft, zweimal jeden zwischen 0 und $\overline{OJ}^2$ enthaltenen Werth annimmt, so werden auch jetzt die Doppelpunkte stets reell sein.

Fig. 47.

J E A O A' F I'

2. Ist aber $AA'.I'A' > 0$, so folgen diese drei Punkte entweder in der Ordnung $AI'A'$ oder $I'AA'$ und da jetzt AJ mit $I'A'$ gleichgerichtet ist, so kann, wenn wir bei der Annahme $AI'A'$ stehen bleiben, der Punkt J in 3 wesentlich verschiedene Lagen fallen

Fig. 48.

a) A J I' A'

b) A I' J A'

c) A I' A' J

$$AJI'A', \quad AI'JA', \quad AI'A'J.$$

In allen diesen Fällen kann aber $AJ.I'A'$ den Werth $\overline{OJ}^2$, den höchsten den $EJ.I'E'$ annehmen kann, übertreffen, und es können daher die Doppelpunkte imaginär sein.

Folgen die Punkte in der Ordnung $I'AA'$, so sind die beiden Fälle möglich:

Fig. 49.

a) I' A J A'

b) I' A A' J

$$I'AJA' \qquad I'AA'J$$

und auch in diesen kann $AJ.I'A'$ den grössten für die Realität der Doppelpunkte zulässigen Werth $\overline{OJ}^2$ übertreffen.

Die Doppelpunkte sind demnach reell:

I. Wenn $AJ.I'A' < 0$ in jedem Falle.

II. Wenn $AJ.I'A' > 0$ und gleichzeitig

1) $AA'.I'A' < 0$ ist, in jedem Falle. Wenn aber

2) $AA'.I'A' > 0$ ist, so muss die Bedingung

$$(A'J + A'I')^2 > 4AA'.I'A'$$

erfüllt sein, wenn die Doppelpunkte reell sein sollen.*)

*) Die Bedingungen, wenn AA', BB' und die Constante λ in $\frac{A'P'}{P'B'} = \lambda \frac{AP}{PB}$ gegeben sind, siehe unten bei der Sectio determinata.

Im Falle also, dass der halbe Abstand der Fluchtpunkte ($OJ < q$) kleiner als die Quadratwurzel der negativen Potenz bei einstimmiger Lage der Punktreihen ist, existiren keine reellen Doppelpunkte mehr; sie sind imaginär geworden. Es ist dies nicht die Folge einer besonderen Art der projectivischen Beziehung der Punktreihen zu einander, sondern nur ihrer Lage. Zwei beliebige projectivische Punktreihen können immer so aufeinandergelegt werden, dass ihre Doppelpunkte imaginär werden; man braucht sie nur gleichlaufend aufeinander zu legen und dann so zu verschieben, dass die Entfernung ihrer beiden Fluchtpunkte kleiner als die doppelte Potenz ist, welch letztere Grösse bei dieser Verschiebung nicht geändert wird.

Eine anschauliche Vorstellung von solchen Punktreihen erhält man, wenn man zwei congruente Punktreihen gleichlaufend aufeinandergelegt denkt, oder allgemeiner: Wenn man zwei congruente Strahlenbüschel so aufeinanderlegt, dass sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt S haben und gleichlaufend sind, so schneiden sie eine beliebige Transversale in zwei gleichlaufenden projectivischen Punktreihen, deren Doppelpunkte imaginär sind. Denn wenn P, P', Q, Q' homologe Punkte sind, so ist $PSP' = QSQ' =$ const., es kann also PP' niemals verschwinden.

Wenn die Entfernungen homologer Punkte PP'. QQ' zweier auf einer Geraden vereinigten Punktreihen von einem ausserhalb derselben gelegenen Punkte aus immer unter demselben Winkel erscheinen, so sind die Punktreihen projectivisch, mit imaginären Doppelpunkten.

Es gilt nun der sehr merkwürdige umgekehrte Satz: Ausserhalb der Geraden, auf welcher sich zwei beliebige projectivische Punktreihen mit imaginären Doppelpunkten befinden, gibt es zwei symmetrisch liegende Punkte, von denen aus die Entfernungen zweier homologen Punkte immer unter einem constanten Winkel und daher homologe Strecken beider Punktreihen unter gleichen Winkeln erscheinen.

Diese Punkte E, F, welche hier gleichsam die Stelle der imaginär gewordenen Doppelpunkte auf der Geraden vertreten, findet man, wenn man in O die Perpendikel:

$$OE = OF = \sqrt{q^2 - OJ^2}$$

errichtet. Dann ist $q = EJ = EI'$ also:

$$JP \,.\, I'P' = -q^2, \quad PJ \,.\, EJ = EI' \,.\, I'P'$$

und da in den Dreiecken PEJ, $EP'I'$ die Winkel bei J und I' gleich sind, so sind diese ähnlich, also Winkel $PEJ = EP'I'$ oder, wenn EJ' parallel JI', Winkel $PEJ = P'EJ'$, und daher $PEP' = JEJ' = \text{const.}$ Sind nun Q, Q' irgend ein anderes Paar homologer Punkte, so ist $PEP' = QEQ'$ also auch $PEQ = P'EQ'$.

Da drei Paare projectivischer Reihen stets willkührlich gewählt werden können, so ergibt sich hieraus folgender Satz:

Es gibt in der Ebene einer Geraden zwei symmetrisch liegende Punkte, von denen aus drei beliebige Segmente AA', BB' CC' auf der Geraden unter gleichem Winkel erscheinen. — Die Bedingungen, unter denen diese Punkte reell sind, würden sich nach den oben gegebenen Kriterien durch die Strecken der Geraden ausdrücken lassen. Hier mag nur erwähnt werden, dass jene Punkte stets reell sind, wenn ABC in anderer Ordnung liegen wie $A'B'C'$.

Der ausführlicheren Darlegung der Bedingungen, unter welchen die Doppel-Elemente zweier aufeinanderliegender Punktreihen reell oder imaginär werden, möge nur kurz noch eine gleichfalls auf metrischen Relationen beruhende Untersuchung folgen, welche die entsprechenden Kriterien für zwei Strahlbüschel darlegt.

Aus der Gleichung: $\text{tang}\,(jp)\,\text{tang}\,(i'p') = -q^2$ folgt:

$$\text{tang}(jp)\,\text{tang}\,(jp') + \text{tang}(i'j)\{\text{tang}\,(jp) - q^2\,\text{tang}\,(jp')\} = -q^2$$

und somit für den Doppelstrahl:

$$\text{tang}\,(je) = -\frac{(1-q^2)\,\text{tang}\,(i'j)}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{((1-q^2)\,\text{tang}\,i'j)^2 - 4q^2}.$$

Derselbe ist also nur dann reell, wenn:

$$\text{tang}\,(\overline{i'j})^2 > \frac{4q^2}{(1-q^2)^2}.$$

Man setze nun $q = \tan u$ und hat dann die Bedingung:

$$\tan\,(\overline{i'j})^2 > \tan\,(\overline{2u})^2.$$

Nun ist aber nach goniometrischen Sätzen

$$\operatorname{tang} \overline{(i'j)}^2 - \operatorname{tang} \overline{(2u)}^2 = \frac{\sin(i'j+2u)\sin(i'j-2u)}{\cos\overline{(i'j)}^2 \cos\overline{(2u)}^2}$$

also geht die obige Bedingung über in:

$$\sin(i'j+2u) \,.\, \sin(i'j-2u) > 0.$$

Bestimmt man nun 4 Strahlen so, dass die Winkel

$$u = jh = h'i' = gj = i'g' \qquad (q = \operatorname{tang}(u))$$

so hat man:

$$i'j + 2u = i'j + jh + h'i' = h'h$$
$$i'j - 2u = i'j + jg + g'i' = g'g.$$

Die Bedingung der Realität ist daher:

$$\sin(h'h) \,.\, \sin(g'g) > 0,$$

das heisst, die Strahlen g, h werden nicht durch die Strahlen g, h' getrennt. Wenn dagegen g' in den einen Winkelraum gh fällt, h' aber in den anderen, so sind die Doppelpunkte imaginär. Stossen sie an einander an, d. h. fallen die Strahlen g und g', oder h und h' zusammen, so sind die Doppelstrahlen mit einander in dem Grenzstrahle vereinigt.

Das vorstehende Kriterium hätten wir aus der für Punktreihen gefundenen Bedingung $G'G \,.\, H'H > 0$ direct ableiten können. Denn schneidet man die beiden auf einander liegenden Strahlbüschel durch eine Transversale, welche einer der beiden Richtungen, die den Winkel ij' (also auch ji') halbiren, parallel läuft, so werden auf diesen Punktreihen die Hauptpunkte GG', HH' gerade durch die Strahlen gg', hh' ausgeschnitten.

§. 7.

Ein- und umbeschriebene Polygone.

Wir haben bereits früher (§. 3) die Aufgabe gelöst, Dreiecke zu construiren, welche einem Dreieck ABC eingeschrieben und einem anderen $A'B'C'$ umschrieben waren, jedoch unter der Voraussetzung, dass $A'B'C'$ dem ABC umschrieben war und fanden dort, dass es unendlich viele solche Dreiecke gibt.

Wir lösen jetzt die Aufgabe ohne jene beschränkende

Voraussetzung, und, da die Lösung bei allen Vielecken nach derselben Methode geschieht, am Viereck.

Sind 4 feste Gerade $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ und 4 feste Punkte $S_1 S_2 S_3 S_4$ gegeben, so soll ein Viereck $B_1 B_2 B_3 B_4$ construirt werden, welches dem Vierseit $a_1 a_2 a_3 a_4$ ein- und dem Viereck $S_1 S_2 S_3 S_4$ umschrieben ist.

Lösung: Man nehme auf a_1 beliebig den Punkt B_1 an, ziehe $B_1 S_1$ und suche den Durchschnitt mit a_2, der B_2 heisse; so fahre man fort das Viereck dem Vierseit ein- und dem Viereck umzubeschreiben, und man wird endlich durch $B_4 S_4$ zu einem Punkte B_1' auf a_1 gelangen. Das Viereck $B_1 B_2 B_3 B_4 B_1'$ ist aber noch kein geschlossenes. Man muss vielmehr B_1 auf a_1 so lange bewegen, bis B_1 mit seinem entsprechenden B_1' zusammenfällt. Bei dieser Bewegung beschreiben aber B_1 und B_1' projectivische Punktreihen; denn es beschreibt B_2 eine mit B_1 projectivische Punktreihe, ebenso B_2 mit B_3, B_3 mit B_4 und B_4 mit B_1'. Daraus ergibt sich aber folgende Construction:

Man nehme auf a_1 drei Punkte B_1, C_1, D_1 beliebig an, construire zu jedem derselben den homologen Punkt B_1', C_1', D_1' auf a_1 und suche mittels der Steiner'schen Construction die Doppelpunkte der hiedurch bestimmten projectivischen Punktreihen. Diese sind die Ecken des gesuchten Vierecks.

Es gibt also zwei (reelle oder imaginäre) Vielecke, welche einem beliebigen n Eck umschrieben und gleichzeitig einem beliebigen n seit eingeschrieben sind.

Wir haben hiebei angenommen, dass die Aufgabe vorschreibt, in welcher Ordnung die auf den $a_1\, a_2 .. a_n$ liegenden Punkte $B_1 B_2 .. B_n$ zu einem Vieleck verbunden, und welche Seiten desselben durch die Punkte $S_1 S_2 .. S_n$ gehen sollen. Ist dies nicht bestimmt, so ist die Anzahl der Lösungen sehr gross. Nimmt man die Punkte $B_1 .. B_n$ beliebig auf den Geraden $a_1 .. a_n$ an, so kann man sie auf $\frac{(n-1)!}{2}$ Weisen zu einem einfachen n Eck gruppiren. Fasst man eines dieser n Ecke in's Auge, so bleibt es noch unbestimmt, durch welche Punkte diese Seiten gehen sollen, und es gibt offenbar $n!$ Annahmen in dieser Beziehung. Im Ganzen kann man also die Geraden und Punkte auf $\frac{1}{2}(n-1)!\, n!$ Weisen

combiniren, und es gibt daher im Allgemeinen $(n-1)!\,n!$ Lösungen.

Es kann die Frage aufgeworfen werden, ob ein n Eck einem gegebenen n Eck, zugleich ein- und umgeschrieben werden könne.

Für $n = 3$ ist dies offenbar unmöglich. Denn wäre ABC das gegebene Dreieck, so muss das ihm umgeschriebene eine Seite haben, welche durch A geht; sei diese AA' und A' ihr Durchschnitt mit a, so müsste nun A' eine Ecke des zugleich um- und einbeschriebenen Dreiecks sein; die zweite durch A' gehende Seite müsste dann nach B oder C gerichtet sein, d. h. sie würde mit a zusammenfallen.*)

Für $n = 4$ aber hat die Aufgabe nichts Paradoxes. Wir brauchen nur in unserer allgemeinen Aufgabe das Viereck $S_1 S_2 S_3 S_4$ mit dem Vierseit $a_1 a_2 a_3 a_4$ zusammenfallen zu lassen. Jedoch muss dabei S_1 in die Ecke $a_3 a_4$ gelegt werden, damit es nicht auf a_1 und a_2 liege; denn sonst könnte nicht $B_1 B_2$ durch S_1 gehen. Lässt man so in gehöriger Weise das Viereck mit dem Vierseit zusammenfallen, so kann die frühere Construction völlig wiederholt werden. Die Doppelpunkte werden aber dann imaginär.**)

§. 8.

Begriff des involutorischen Systems.

Man sagt, dass zwei projectivische Punktreihen p, p', welche auf einer Geraden liegen, in Involution stehen, wenn einem Punkte P der Geraden jedesmal derselbe Punkt P' entspricht, mag man P als Punkt von p ansehen und seinen homologen in p' suchen, oder mag man ihn als Punkt

---

*) Merkwürdig ist der von Möbius (Crelle, Journ. Bd. III, p. 275) gefundene, von Steiner (syst. Entw. S. 247) weiter behandelte Satz, dass es im Raume unendlich viele Tetraeder gibt, welche einem gegebenen zugleich ein- und umgeschrieben sind.

**) Wie Möbius durch Rechnung (Crelle, Bd. III, p. 278) gezeigt hat. Steiner hat (syst. Entw. S. 308) den Nachweis verlangt, aber nicht gegeben. Neuerdings ist derselbe in Grunerts Archiv für 1870, S. 1, behandelt worden.

von p' ansehen und seinen homologen in p suchen. Je zwei einander so conjugirte Punkte bilden ein Punktepaar, deren Gesammtheit ein involutorisches Punktsystem.

Was man unter einem involutorischen Strahlensystem zu verstehen habe, ist hienach von selbst einleuchtend; es wird nicht nothwendig sein, das Strahlensystem noch neben dem Punktsystem ausdrücklich zu behandeln.

Es ist zunächst nachzuweisen, dass ein solches System möglich ist.

Nach der gegebenen Definition müssen die beiden Fluchtpunkte J, I' als in p, p' den unendlich entfernten Punkten von p', p homolog, in einen Punkt, den Mittelpunkt (Centralpunkt) der Involution O zusammenfallen, und die Relation der beiden projectivischen Geraden ist jetzt: (π Potenz der Involution)

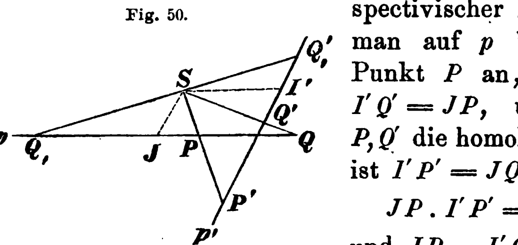
$$OP \,.\, OP' = \text{const.} = \pi.$$

Aus dieser Gleichung geht aber unmittelbar hervor, dass man als P entsprechend immer denselben Punkt P' erhält, mag man jenen als Punkt von p oder von p' ansehen.

Zwei projectivische Punktreihen geben, wenn sie so aufeinander gelegt werden, dass ihre Fluchtpunkte zusammenfallen, ein involutorisches Punktsystem. Um ein solches zu Stande zu bringen, ist also nicht eine besondere Art der projectivischen Beziehung von p, p' zu einander nothwendig; nur ihre Lage gegen einander bedingt den involutorischen Charakter.

Um diese Verhältnisse deutlicher zu übersehen, so denke man sich zwei projectivische Gerade p, p' in perspectivischer Lage. Nimmt man auf p beliebig einen Punkt P an, macht dann $I'Q' = JP$, und sucht zu P, Q' die homologen P', Q, so ist $I'P' = JQ$. Denn da

Fig. 50.



$$JP \,.\, I'P' = JQ \,.\, I'Q',$$

und $JP = I'Q'$, so ist auch $I'P' = JQ$. Dabei ist es gleichgiltig, ob man $I'Q'$ nach der einen oder der anderen Seite hin abträgt.

Legt man nun beide Geraden so aufeinander, dass J mit I' zusammenfällt, so wird entweder Q' oder Q_1' mit P zusammenfallen. Fällt Q' mit P zusammen, so wird auch P' mit Q vereinigt liegen, und die beiden Punkte $P = Q'$, $P' = Q$ haben die involutorische Beziehung; da aber P ein ganz beliebiger Punkt ist, so sehen wir jetzt anschaulich, wie jene Beziehung zu Stande kommt. Legen wir die beiden Geraden so zusammen, dass Q_1' auf P zu liegen kommt, so ändern sich diese Verhältnisse nicht.

Wenn bei zwei aufeinanderliegenden projectivischen Punktreihen von einem einzigen Punktpaare PP' nachgewiesen ist, dass es sich involutorisch entspricht, so folgt daraus die Involution aller anderen.

Denn da nach der Voraussetzung

$$JP \,.\, I'P' = JP' \,.\, I'P$$

so ist

$$\frac{PJ}{JP'} = \frac{PI'}{I'P'},$$

d. h. J und I' theilen die Strecke PP' nach einerlei Verhältniss, fallen also zusammen.

Wenn von einem involutorischen Punktsysteme zwei Paare conjugirter Punkte A, A' und B, B' gegeben sind, so ist dasselbe völlig und zwar eindeutig bestimmt, d. h. es kann zu jedem weiteren Punkte C sein conjugirter C' gefunden werden.

Denn werden A, A', B, C als Punkte von p angesehen, so sind die homologen in p': A', A, B', C' und es ist also der Punkt C' so zu bestimmen, dass:

$$(A'AB'C') = (AA'BC).$$

Drei Paar homologer Punkte A, A'; B, B'; C, C' bestimmen die allgemeine **projectivische** Beziehung zweier Punktreihen; **zwei** Paare sind hinreichend zur Bestimmung einer **Involution**. Sind also drei Paare A, A'; B, B'; C, C' conjugirter Punkte gegeben, welche einer Involution angehören sollen, so muss eine Bedingung zwischen ihnen bestehen; ist diese nicht erfüllt, so können die Punkte auch kein involutorisches System bilden.

Diese Bedingung besteht darin, dass das Doppelverhältniss von 4 dieser Punkte gleich dem der entsprechenden

4 Punkte sein muss, wenn in jedem Doppelverhältniss aus jedem Paare wenigstens ein Punkt genommen wird. Die möglichen Combinationen der Punkte sind dann folgende: Zunächst erhält man, wenn immer drei Punkte ABC und einer aus der Reihe $A'B'C'$ genommen wird:

1) $$(ABCC') = (A'B'C'C)$$
2) $$(BCAA') = (B'C'A'A)$$
3) $$(CABB') = (C'A'B'B)$$

Dann, wenn zwei Punkte von der einen Art mit zweien der anderen combinirt werden:

4) $$(A'BC'A) = (AB'CA')$$
5) $$(B'CA'B) = (BC'AB')$$
6) $$(C'AB'C) = (CA'BC')$$

Da aber die involutorische Lage von sechs Punkten nur eine Bedingung erfordert, so müssen die vorstehenden sechs Gleichungen nothwendig aus einer einzigen derselben abgeleitet werden können. Um dieses nachzuweisen, gehe man von irgend einer der sechs Formen aus; mit Hilfe des Satzes, dass zwei einander gleiche Doppelverhältnisse einander noch gleich bleiben, wenn man in beiden die Buchstaben in gleicher Weise vertauscht, ist sodann zu untersuchen, wie sich bei Entwickelung des Doppelverhältnisses jede andere Form daraus folgern lässt.

So führt z. B. die Gleichung 1) auf die Form

$$(BCAC') = (B'C'A'C)$$

und diese vermittels der entwickelten Darstellung:

$$\frac{BA}{AC} \cdot \frac{C'C}{BC'} = \frac{B'A'}{A'C} \cdot \frac{CC'}{B'C}$$

auf die Gleichung 4). Auf diese und ähnliche Weisen ist es nicht schwierig, den Nachweis des Zusammenhanges aller sechs Gleichungen unter einander zu erbringen. Man gelangt dabei zu eigenthümlichen Formen, unter welchen sich die involutorische Beziehung dreier Punktpaare zusammenfassen lässt, indem nämlich die erste Gruppe in der Form von Vierecksverhältnissen, die zweite in der Form von Dreiecksverhältnissen dargestellt werden kann. Fügen wir den obigen Gleichungen noch als siebente der Symmetrie halber die Relation:

$$(ABC'A') = (A'B'CA) \qquad 7)$$

hinzu, so lautet das System der von einander abhängigen Bedingungsgleichungen:

$$(ABA'B', CC'CC') = +1 \qquad 1)$$
$$(BCB'C', AA'AA') = +1 \qquad 2)$$
$$(CAC'A', BB'BB') = +1 \qquad 3)$$
$$(A'BC, C'AB') = -1 \qquad 4)$$
$$(AB'C, C'A'B) = -1 \qquad 5)$$
$$(ABC', CA'B') = -1 \qquad 6)$$
$$(ABC, C'A'B') = -1 \qquad 7)$$

§. 9.

Involution am vollständigen Viereck und Vierseit.

Satz von Desargues: Die 6 Seiten eines vollständigen Vierecks werden von jeder Transversalen in einer Involution geschnitten.

Seien a, a'; b, b'; c, c' die drei Paare gegenüberliegender Seiten, von denen $a'b'c'$ in einem Punkte P' zusammenlaufen, abc' in P, dann geht c durch ab' und $a'b$. Bezeichnet man nun den Durchschnitt der Seiten a, a', b, b', c, c' mit einer beliebigen Transversale l mit A, A', B, B', C, C', so sieht man, dass $(a, b, PC, c') = (b', a', P'C, c')$. Schneidet man beide Büschel durch l, so ist daher

$$(ABCC') = (B'A'CC')$$

oder da nach bekannten Sätzen $(B'A'CC') = (A'B'C'C)$, so hat man

$$(ABCC') = (A'B'C'C)$$

d. h. die Involutionsgleichung.

Aus diesem Satze ergibt sich nun leicht eine lineare Construction eines sechsten Punktes C' einer Involution, von der 5 Punkte $AA'BB'C$ gegeben sind: Man zieht durch C eine beliebige Linie, welche man als Diagonale eines Vierseites ansieht, welches von 4 durch $AA'BB'$ gelegte Linien gebildet wird, d. h. man nimmt auf der durch C gelegten Linie zwei Punkte beliebig an, in denen sich resp. $ab', a'b$ schneiden. Die andere Diagonale durch $ab, a'b'$ schneidet in C'.

Ein anderer Beweis dieses Satzes, den Poncelet andeutet, gibt mit einem Schlage alle obigen 7 Formen der involutorischen Beziehung:

Man denke sich ein Viereck von einem Punkte ausserhalb seiner Ebene en relief projicirt, so dass es in ein windschiefes Viereck, oder in ein Tetraeder übergeht; die Kanten des Tetraeders, die den $aa'bb'cc'$ entsprechen, mögen jetzt $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ heissen. Der Transversale l entspricht dann eine durch den Projectionspunkt gehende Ebene λ, und diese wird von den Kanten $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ in 6 Punkten $AA'BB'\Gamma\Gamma'$ geschnitten, welche ein vollständiges Vierseit bilden. Denn es liegen $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta'\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma'$, $\alpha'\beta'\gamma$ resp. in einer Ebene und daher $AB\Gamma$, $AB'\Gamma'$, $A'B\Gamma'$, $A'B'\Gamma$ resp. in einer Geraden. Die Projectionsstrahlen dieser 6 Punkte schneiden die ursprüngliche Transversale l in den 6 Punkten $AA'BB'CC'$ und wir finden somit den Satz:

Die 6 Durchschnitte der Seiten eines vollständigen ebenen Vierecks mit einer Transversale können stets als Centralprojection eines vollständigen ebenen Vierseits auf die in seiner Ebene liegende Transversale angesehen werden.

Ein vollständiges Vierseit mit seinen 8 Strecken ist offenbar vollständig bestimmt, wenn 5 Strecken etwa $B\Gamma$, $B'\Gamma$, $B\Gamma'$, $B'\Gamma'$ und BA gegeben sind; es müssen also wesentlich drei Relationen zwischen jenen 8 Strecken bestehen.

Diese erhält man aus dem Menelaischen Satze, wenn man das Vierseit ansieht als ein Viereck $ABA'B'$, welches von der Transversale $\Gamma\Gamma'$ geschnitten wird:

1) $$(ABA'B', \Gamma\Gamma'\Gamma\Gamma') = +1$$

ebenso als Viereck $B\Gamma B'\Gamma'$, geschnitten von AA':

2) $$(B\Gamma B'\Gamma', AA'AA') = +1$$

schliesslich als Viereck $\Gamma A\Gamma' A'$, geschnitten von BB':

3) $$(\Gamma A\Gamma' A', BB'BB') = +1.$$

In anderer Form erhält man diese Relationen, wenn man das Vierseit ansieht als ein Dreieck $A'B\Gamma$, welches von einer Transversalen $\Gamma'AB$ geschnitten wird; dann ergibt sich:

$$(A'B\Gamma,\ \Gamma'AB') = -1 \qquad 4)$$
$$(AB'\Gamma,\ \Gamma'A'B) = -1 \qquad 5)$$
$$(AB\Gamma',\ \Gamma A'B') = -1 \qquad 6)$$

und $$(A'B'\Gamma',\ \Gamma AB) = -1$$

oder $$(AB\Gamma,\ A'B'\Gamma') = -1 \qquad 7)$$

Das sind die Relationen zwischen den 8 Strecken des Vierseits. Da dieselben projectivisch sind, so gelten sie auch für die 8 Strecken zwischen $AA'BB'CC'$ auf l, und so erhält man auf die einfachste Weise die 7 Formen der Involution. Ausnahmsweise mag hier der duale Satz noch erwähnt und bewiesen werden:

Die Verbindungslinien der 6 Ecken eines Vierseites mit einem beliebigen Punkte bilden ein involutorisches Strahlensystem.

Seien AA', BB', CC' die Ecken eines vollständigen Vierseits, von denen $A'B'C'$ auf einer Geraden liegen; man nenne $a\,a'\,b\,b'\,c\,c'$ resp. deren Verbindungslinien mit dem Punkte L. Nennt man ferner Q den Durchschnitt von c mit AB, Q' den von c mit $A'B'$, so hat man, wenn man von C aus die betreffenden Punkte betrachtet: $(A'B'Q'C') = (BAQC)$, also, durch Projection vom Punkte L: $(a'b'cc') = (bacc')$ oder da: $(bacc') = (abc'c)$, $(abc'c) = (a'b'cc')$.

§. 10.

Die Doppelpunkte der Involution.

Die conjugirten Punkte P, P' eines involutorischen Punktsystemes haben ein durch die Gleichung

$$OP \,.\, OP' = \pi$$

ausgedrücktes Verhältniss zu dem Centralpunkt O der Involution, der die Fluchtpunkte beider aufeinander gelegter projectivischer Punktreihen vereinigt.*)

---

*) Nimmt man irgend einen anderen Punkt A zum Ausgang, so verwandelt sich die Gleichung in:

$$AP \,.\, AP' + \lambda\,(AP + AP') + \mu = o.$$

Sie geht aus der Gleichung, welche die projectivische Beziehung im Allgemeinen ausdrückt:

$$AP \,.\, AP' + \lambda' AP + \lambda AP' + \mu = o$$

Unter den Punkten des Systems gibt es nun zwei, welche mit ihren conjugirten zusammenfallen, zwei Doppelpunkte E, F symmetrisch gegen den Centralpunkt O gelegen (Asymptotenpunkte nach Steiner), welche sich aus

$$\overline{OE}^2 = \overline{OF}^2 = \pi$$

bestimmen. Daher:

Zwei involutorisch aufeinanderliegende projectivische Punktreihen haben, wenn sie entgegengesetzten Sinnes sind, eine positive Potenz $OP \,.\, OP' = +q^2$ und daher zwei reelle Doppelpunkte, wenn sie aber einerlei Sinnes sind, eine negative Potenz $OP \,.\, OP' = -q^2$ und daher imaginäre Doppelpunkte. Im ersten Falle wird das System ein hyperbolisches, im zweiten Falle ein elliptisches genannt. Eigenthümlich ist der Grenzfall, wo die Potenz $OP \,.\, OP' = o$; es ist alsdann der Punkt O allen Punkten der Geraden conjugirt, das System wird ein parabolisches genannt.

Sind uns zwei Punktpaare AA', BB' einer Involution gegeben, so ist sie dadurch völlig bestimmt, und es ist von Bedeutung, unmittelbar entscheiden zu können, ob die Doppelpunkte reell oder imaginär sind. Dazu führen folgende Betrachtungen:

Haben die beiden Punktreihen, welche ein involutorisches Punktsystem bilden, entgegengesetzten Sinn, so liegt O stets ausserhalb einer Strecke $AA', BB', \ldots$, welche conjugirte Punkte verbindet. Denn der Bewegung von O nach A im Endlichen muss eine entgegengesetzte Bewegung aus dem Unendlichen nach A' entsprechen, bei welcher der Punkt O nicht überschritten wird.

Wenn A und B auf verschiedenen Seiten von O liegen, so fallen also AA' und BB' ganz ausserhalb einander und greifen nicht in einander ein; der Centralpunkt O liegt zwischen ihnen. Liegen dagegen A und B auf derselben Seite von O, so muss wegen der Gleichung $OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB'$, wenn $OB < OA$ auch $OB' > OA'$, und wenn

---

hervor, wenn man die Bedingung ausdrückt, dass die Punkte P, P' einander doppelt entsprechen, die Gleichung also nach AP, AP' symmetrisch sein muss.

$OB > OA$ auch $OB' < OA'$ sein, d. h. eine der Strecken liegt ganz innerhalb der anderen. Der Centralpunkt liegt ausserhalb.

Sind dagegen die Punktreihen einerlei Sinnes, so liegt der Mittelpunkt immer innerhalb einer Strecke, wie AA' BB', ... dann greifen aber auch zwei Strecken AA', BB' jedenfalls in einander über. Denn bezeichnen wir den von O entfernteren Punkt mit A' und betrachten wir die Gleichung $OA \cdot OA' = OB . OB'$, so leuchtet ein, dass im Falle, wo A und B auf derselben Seite von O liegen, also A' und B' auf der anderen, wenn $OB > OA$ ist, $OB' < OA'$ sein muss, und umgekehrt, wenn $OB < OA$, $OB' > OA'$. — Liegen dagegen A, B auf verschiedenen Seiten, somit auch A' und B', so muss, wenn $OA > OB'$ ist, $OA' < OB$ sein und wenn $OA < OB'$, $OA' > OB$. Auch hier greifen daher die Strecken in einander ein.

Somit können wir behaupten:

Wenn die von zwei Paaren conjugirter Punkte eingeschlossenen Strecken AA', BB' entweder ganz ausserhalb einander oder eine in der anderen liegt, so findet eines oder das andere auch für jedes Paar solcher Strecken statt. Der Mittelpunkt der Involution liegt dann ausserhalb aller solcher Strecken, die Punktreihen $AB, \ldots A'B'$ .. sind dann entgegengesetzt gerichtet und die Doppelpunkte reell (es gibt auf jeder Seite von O zwei verschwindende Strecken EE', FF').

Wenn dagegen die von zwei Paaren conjugirter Punkte AA', BB' eingeschlossenen Strecken in einander eingreifen, so greifen auch alle anderen solchen Strecken in einander ein. Der Mittelpunkt der Involution liegt dann auf der allen gemeinsamen Strecke, die Punktreihen AB .. $A'B'$ .... sind gleichlaufend; Doppelpunkte existiren dann nicht im Reellen (es gibt keine verschwindenden Strecken EE').

Nach dem Vorstehenden wird es nicht schwierig sein, folgenden Satz zu erkennen: Sind vier beliebige Punkte auf einer Geraden gegeben, $ABCD$, so kann man dieselben auf drei Arten in Gruppen von je zwei zusammenfassen, nämlich:

AB und CD
AC und BD
BC und AD.

Betrachtet man je zwei zusammengehörige Paare als conjugirte Punkte eines involutorischen Systemes, so werden von den drei Involutionssystemen immer zwei hyperbolisch, das dritte elliptisch werden.

Die Beziehung, in welcher zwei conjugirte Punkte P, P' zu den Doppelpunkten stehen, nämlich

$$OP \cdot OP' = \overline{OE}^2 = \overline{OF}^2$$

lässt sich auch dahin ausdrücken: Zwei conjugirte Punkte PP' theilen die Strecke zwischen beiden Doppelpunkten EF harmonisch.

Diesen Satz kann man leicht herleiten aus der bekannten Beziehung projectivischer Punktreihen:

$$\frac{AP}{PB} : \frac{A'P'}{P'B'} = \varrho, \qquad \varrho = \frac{AJ}{BJ}.$$

Setzen wir nun jetzt $A = A' = E$, $B = B' = F$, $I' = J = O$, so haben wir, da $EO = -FO$, $\varrho = -1$ und somit:

$$(EFPP') = -1.$$

Während also im Allgemeinen bei zwei aufeinanderliegenden projectivischen Systemen die Strecke EF von homologen Punktepaaren nach beliebigem, aber constantem Doppelverhältnisse getheilt wird, ist für das involutorische System dieser constante Werth gleich -1.

Sind zwei Paare des involutorischen Punktsystems AA', BB' gegeben, so bestimmt sich der Mittelpunkt O desselben, wenn man durch einen beliebigen Punkt G ausser der Geraden die Kreise GAA', GBB' legt; die Kreise schneiden sich dann noch in G' und die gemeinschaftliche Sehne GG' geht durch O. Denn es ist:

$$OA \cdot OA' = OG \cdot OG' = OB \cdot OB'.$$

Schneidet p die Sehne GG' ausserhalb der Strecke GG', so greifen die Segmente nicht in einander über; es gibt reelle Doppelpunkte E, F, deren Entfernung $\overline{OE}^2 = \overline{OF}^2 = \overline{OT}^2 = OG \cdot OG'$, wobei OT die Länge der Tangente ist von O

an einen der beiden Hilfskreise; damit sind also auch diese gefunden.

Das System aller durch zwei reelle Punkte GG' gehenden Kreise wird von einer beliebigen Transversalen jedesmal in einem involutorischen Punktsystem geschnitten, dessen Mittelpunkt O sich auf der Geraden GG' befindet. Liegt O ausserhalb der Strecke GG', so hat das System zwei reelle Doppelpunkte, in welchen die Transversale von zweien durch GG' gehenden Kreisen berührt wird. Liegt dagegen O innerhalb der Strecke GG', so sind die Doppelpunkte imaginär.

Im Falle, dass die Doppelpunkte imaginär sind, kann man die Construction des Mittelpunktes O noch dahin abändern: Man beschreibe über den zwei Strecken AA', BB' als Durchmesser Kreise, die sich, da die Strecken in diesem Falle in einander greifen, in zwei reellen Punkten G, H schneiden. Der Mittelpunkt O liegt auf GH, und jeder durch GH gehende Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden p liegt, schneidet diese in zwei conjugirten Punkten. Da die Winkel AGA', BGB', ... dann sämmtlich rechte sind, so hat man den Satz:

Ausserhalb der Geraden p, auf welcher ein involutorisches Punktsystem mit imaginären Doppelpunkten liegt, gibt es stets zwei symmetrisch liegende Punkte G, H, von denen aus alle Entfernungen conjugirter Punkte unter einem rechten Winkel gesehen werden. (Ist $OP \,.\, OP' = -q^2$ die Potenz, so liegt G um die Strecke q über dem Mittelpunkte O.)*)

Dreht sich ein rechter Winkel um einen Punkt, so beschreiben seine beiden Schenkel auf einer beliebigen Transversale ein involutorisches Punktsystem mit imaginären Doppelpunkten. Auch bei zwei beliebigen projectivischen Punktreihen, die einen gemeinschaftlichen Träger haben, treten involutorische Beziehungen auf, nämlich so [Chasles, Traité, p. 182]:

Sind $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ zwei projectivische Punktreihen auf einer Geraden in beliebiger Lage gegen ein-

*) Die Punkte G, H vertreten hier gewissermaassen die Stelle der imaginär gewordenen Doppelpunkte.

ander, nur so, dass die Doppelpunkte E, F reell sind, so bilden $AB', A'B, EF$ eine Involution, ebenso $AC', A'C, EF$ eine solche u. s. w.

Beweis. Es ist bei projectivischen Punktreihen bekanntlich $(AA'EF) = \varrho$ eine von AA' unabhängige Constante; also $(AA'EF) = (BB'EF)$ und da $(BB'EF) = (B'BFE)$:

$$(AA'EF) = (B'BFE),$$

d. h. diese Punkte bilden eine Involution, wenn A und B', A' und B, E und F je als conjugirte Punkte angesehen werden.

Da somit nach Obigem, wenn sich zwei durch AB' und $A'B$ gelegte Kreise in GG' schneiden, auch $EFGG'$ auf einem Kreise liegen müssen, so erhalten wir folgende neue Construction der Doppelpunkte projectivischer Geraden, wenn drei Paare homologer Punkte AA', BB' CC' gegeben sind.

Man lege durch einen beliebigen Punkt G der Ebene vier Kreise, welche $AB', A'B, AC', A'C$ zu Sehnen haben, nenne G' den Durchschnitt der beiden ersten, G'' den der beiden letzten, so schneidet der durch $GG'G''$ gelegte Kreis die Gerade in den beiden Doppelpunkten E, F.

Sind AA', BB' zwei Paare conjugirter Punkte eines involutorischen Systemes, dessen Doppelpunkte EF sind, so ist wie vorhin auch jetzt $AB', A'B, EF$ eine Involution. Da aber in einem solchen System conjugirte Punkte miteinander vertauscht werden können, so ist auch $AB, A'B'$, EF eine Involution. Daraus ergibt sich folgende Construction der Doppelpunkte einer Involution:*)

Man lege durch einen beliebigen Punkt der Ebene G zwei Kreise durch AB' und $A'B$, welche sich in G' schneiden, dann durch G zwei Kreise durch AB und $A'B'$, welche sich in G'' schneiden. Der durch $GG'G''$ gelegte Kreis schneidet die Gerade in den Doppelpunkten E, F der Involution.

Diese Construction ist immer anwendbar, sobald die Doppelpunkte überhaupt reell sind. Nicht so steht es mit

---

*) Chasles, Traité, pag. 147.

der folgenden Construction, bei welcher zu weiterer Construction nothwendige Punkte imaginär werden, auch wenn die Doppelpunkte reell sind; davon abgesehen wäre sie noch einfacher als die vorige:

Man beschreibe über AB', $A'B$ als Durchmesser zwei Kreise, ebenso über AB, $A'B'$; durch die 4 Durchschnitte der beiden Kreispaare geht dann der Kreis, der von der Geraden in E, F geschnitten wird.

Vierter Abschnitt.

Aufgaben des Apollonius.

§. 1.

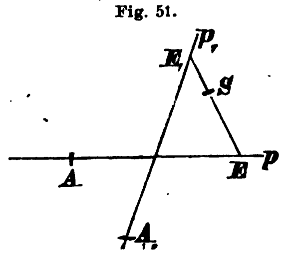
Sectio rationis (περὶ λόγου ἀποτομῆς).

Sowie wir heute geometrische Aufgaben gern auf die Lehre von den projectivischen Verwandtschaften stützen und sie auf eine in dieser Lehre abgehandelte Construction zurückführen, so sahen sich auch die Alten, als sie nach Vollendung der elementaren Theile sich den höheren Theilen der Geometrie zuwandten, gezwungen, gewisse zusammengesetzte Aufgaben, auf welche sie bei ihren Arbeiten häufig stiessen, an und für sich ausführlich zu behandeln, so dass, wenn eine Aufgabe auf diese fundamentale Aufgabe zurückgeführt war, sie als gelöst angesehen werden konnte. Apollonius von Pergä hat in 4 besonderen Schriften vier solche fundamentale Aufgaben behandelt und es ist interessant genug, dass drei derselben, die *Sectio rationis, Sectio spatii* und *Sectio determinata* unmittelbar auf die Construction von Doppelpunkten projectivischer Punktreihen führen, während die vierte Aufgabe *(inclinatio)* von höherer Art ist.*)

Diese drei Aufgaben sollen im folgenden untersucht werden.

In der Schrift *de sectione rationis*, περὶ λόγου ἀποτομῆς, löst Apollonius folgende Aufgabe:

Fig. 51.



Es sind zwei unbegrenzte gerade Linien p, p_1 in derselben Ebene gegeben, in jeder derselben ein Punkt A, A_1; auch ist ein Verhältniss λ und überdies ein Punkt S ausserhalb der Linien gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine gerade Linie EE_1 ziehen, welche von den ge-

*) Dieselben hat ausser manchen anderen Autoren am kürzesten und doch ganz im Geiste der Alten, im Anschluss an die Arbeiten früherer Geometer, Paucker behandelt: Geom. Analysis. Leipzig 1837.

gebenen Linien Segmente AE, A_1E_1 abschneidet, deren Verhältniss dem gegebenen $1 : \lambda$ gleich ist. $A_1E_1 = \lambda AE$.

Im Sinne der Alten handelt es sich hier nur um das Verhältniss der absoluten Strecken; im Sinne der neueren Geometrie aber, wo jeder Strecke auf einer Geraden auch ein Zeichen zukommt, wird die Aufgabe erst dann bestimmt, wenn auch der positive Sinn beider Geraden und das Vorzeichen von λ gegeben ist. Wir können indess, ohne die Aufgabe dadurch zu beschränken, λ stets als positiv ansehen, weil, wenn es negativ sein sollte, eine Aenderung des Sinnes einer der Geraden das Zeichen von λ umkehren würde. Wir werden also im Folgenden zunächst überall den Sinn beider Geraden als gegeben ansehen, und dann den Punkt E bestimmen. Wir werden dann den Sinn einer Geraden umkehren und auch unter dieser Voraussetzung den oder die Punkte E suchen. Diese sowohl als die früheren lösen dann die Aufgabe in dem Sinne des Apollonius. In der neueren Geometrie wird somit die Aufgabe in zwei zerlegt; sie wird dadurch einfacher und übersichtlicher.

Die Aufgabe kann nun auch so ausgesprochen werden: Man lasse den Punkt P_1 die Gerade p_1 durchlaufen, construire für jedes P_1 ein P so dass:

$$AP = \frac{1}{\lambda} A_1P_1$$

und somit P eine dem P_1 ähnliche Punktreihe durchläuft. Man ziehe alle Verbindungslinien homologer Punkte PP_1. Es wird verlangt, dasjenige Paar homologer Punkte E und E_1 zu construiren, dessen Verbindungslinie EE_1 durch einen gegebenen Punkt S hindurchgeht.

Das ist aber nur eine neue, dem Geiste der neueren Geometrie angemessene Form der Aufgabe. Um sie zu lösen, werden wir neben der zu P_1 ähnlichen, daher auch projectivischen Punktreihe P noch eine zweite projectivische Punktreihe P' construiren, indem wir den auf P_1S liegenden Punkt von p, P' nennen. Auf p liegen somit zwei zu P_1 und zu einander projectivische Punktreihen P, P' und deren Doppelpunkte E, F werden die verlangte Aufgabe lösen.

Um dieselben zu construiren, werden wir zunächst drei

Paare homologer Punkte PP' bestimmen; am einfachsten nehmen wir, wenn $SI_1 \parallel p$, $SI' \parallel p_1$,

dazu die dem	$P_1 = A_1$	I_1	∞
entsprechenden	$P = A$	I	∞
und	$P' = A'$	∞	I'

wo $AI = \frac{1}{\lambda} A_1 I_1$. Dann sind also I, I' die Fluchtpunkte von P, P', die beiden Doppelpunkte E, F liegen symmetrisch gegen dieselben und es ist, wenn die Potenz

$$IP \,.\, I'P' = \pi = IA \,.\, I'A'$$

gesetzt wird:

$$EF^2 = II'^2 + 4\pi.$$

Die Construction der Doppelpunkte kann nun, da die Fluchtpunkte und ein Paar homologer Punkte AA' gegeben sind, am elegantesten nach der früher gelehrten Methode eines unbekannten Autors ausgeführt werden.

Dieselben ergeben sich stets reell, wenn p positiv, also IA mit $I'A'$ gleichgerichtet, oder (wenn wir den Punkt I als einen durch die Figur nicht unmittelbar gegebenen eliminiren, so dass

$$\pi = -\frac{1}{\lambda} A_1 I_1 \,.\, I'A'$$

ist, wo λ positiv), wenn $A_1 I_1$ und $I'A'$ entgegengesetzten Zeichens sind.

Sind dagegen $A_1 I_1$, $I'A'$ desselben Zeichens, so dass

$$\overline{EF}^2 = \overline{II'}^2 - \frac{4}{\lambda} A_1 I_1 \,.\, I'A'$$

so bedarf es weiterer Untersuchungen. Nun ist:

$$I'I = I'A + AI = I'A + \frac{1}{\lambda} A_1 I_1$$

also:

$$\lambda^2 \,.\, \overline{EF}^2 = (\lambda \,.\, I'A + A_1 I_1)^2 - 4\lambda A_1 I_1 \,.\, I'A'.$$

Reell sind demnach die Doppelpunkte, wenn

$$(\lambda \,.\, I'A + A_1 I_1)^2 - 4\lambda A_1 I_1 \,.\, I'A' > 0*).$$

---

*) Die Aufgabe der Construction der Doppelpunkte kann auch rechnend so angegriffen werden: Die projectivischen Beziehungen werden durch:

Um nun diese Bedingung weiter zu behandeln, sehen wir sie als eine quadratische Ungleichung für λ an und suchen sie als solche aufzulösen. Wir haben zunächst:

$$\lambda^2 . \overline{I'A}^2 - 2\lambda A_1 I_1 (AA' + I'A') + \overline{A_1 I_1}^2 > 0$$

oder

$$(\lambda . I'A - \frac{AA' + I'A'}{I'A} A_1 I_1)^2 - (2 \frac{A_1 I_1}{I'A})^2 . AA' . I'A' > 0.$$

Diese Bedingung ist ohne weiteres erfüllt, wenn AA', $I'A'$ entgegengesetzten Zeichens sind.

Sind aber AA', $I'A'$ gleichen Zeichens, so wird λ einer gewissen Bedingung unterliegen müssen, damit jene Ungleichung erfüllt ist. Wenn $\lambda = \infty$ oder $\lambda = 0$, so ist sie, wie man leicht sieht, von selbst erfüllt. Es gibt aber zwei Werthe, für welche die linke Seite jener Ungleichung verschwindet, nämlich die beiden Werthe

$$\lambda . I'A = \frac{AA' + I'A'}{I'A} A_1 I_1 \pm 2 \frac{A_1 I_1}{I'A} \sqrt{AA' . I'A'};$$

dieselben sind positiv; denn es ist:

$$\lambda = \frac{A_1 I_1}{I'A^2} [AA' + I'A' \pm 2 \sqrt{AA' . I'A'}]$$

Nun ist der Ausdruck unter der Klammer jedenfalls von demselben Zeichen, wie AA', $I'A'$, also auch wie $A_1 I_1$, und daher sind beide Werthe von λ positiv.

Liegt λ zwischen diesen beiden Werthen, so ist

$$(\lambda . I'A - \frac{AA' + I'A'}{I'A} A_1 I_1)^2 - (2 \frac{A_1 I_1}{I'A})^2 AA' . I'A'$$

jedenfalls negativ und daher die Doppelpunkte imaginär; sollen sie reell sein, so muss λ ausserhalb des Inter-

---

$$I_1 P_1 . I'P' = I_1 A_1 . I'A', \quad A_1 P_1 = \lambda AP$$

ausgedrückt. Eliminirt man hieraus den Punkt P_1, indem man

$$I_1 P_1 = I_1 A_1 + A_1 P_1 = I_1 A_1 + \lambda AP = I_1 A_1 + \lambda AI' + \lambda I'P$$

setzt, so hat man die projectivische Beziehung von P, P' in der Gleich.

$$\lambda . I'P' . I'P + (I_1 A_1 + \lambda AI') I'P' = I_1 A_1 . I'A'.$$

Die Doppelpunkte werden dann aus der quadratischen Gleichung

$$\lambda \overline{I'E}^2 - (\lambda I'A + A_1 I_1) I'E = I_1 A_1 . I'A'$$

gefunden, und deren Wurzeln sind reell, wenn

$$(\lambda . I'A + A_1 I_1)^2 - 4\lambda A_1 I_1 . I'A' > 0$$

womit wir zu obenstehender Bedingung gelangt sind.

valles liegen, welches jene beiden Werthe einschliessen, die, da

$$AA' + I'A' \pm 2\sqrt{AA' \, . \, I'A'} = (\sqrt{AA'} \pm \sqrt{I'A'})^2$$

$$AI' = AA' - I'A' = (\sqrt{AA'} + \sqrt{I'A'})(\sqrt{AA'} - \sqrt{I'A'})$$

geschrieben werden kann, die einfache Form:

$$\lambda = \frac{A_1 I_1}{[\sqrt{AA'} \pm \sqrt{I'A'}]^2}$$

annehmen. Die Wurzeln $\sqrt{AA'}$, $\sqrt{I'A}$ sind gleichzeitig reell und imaginär; im letzteren Falle wird man dann $\sqrt{AA'} = i\sqrt{A'A}$, $\sqrt{I'A'} = i\sqrt{A'I'}$ und $[\sqrt{AA'} \pm \sqrt{I'A'}]^2$ durch $-[\sqrt{A'A} \pm \sqrt{A'I'}]^2$ ersetzen.

Schreibt man

$$\lambda = \frac{A_1 I_1}{AA' + I'A' \pm 2\sqrt{AA' \, . \, I'A'}}$$

so ist auch der Schein des Imaginären verschwunden und wir haben die Form, in welcher auch Apollonius die Grenzen für λ gibt.

Somit sind die vollständigen Determinationen (διορισμός) der Realität der Lösungen gefunden, deren Ermittelung zwar nicht schwierig, aber, wie bei den meisten geometrischen Aufgaben, mühsam und jedenfalls mühsamer ist, als die Angabe der Lösung im Allgemeinen. Wir fassen dieselben nochmals ausdrücklich zusammen:

Es gibt zwei Lösungen E, F unserer Aufgabe, die reell sind:

I. Wenn $A_1 I_1 \, . \, I'A' < 0$ in jedem Falle.

II. Wenn $A_1 I_1 \, . \, I'A' > 0$ und gleichzeitig

1) $AA' \, . \, I'A' < 0$ ist, was auch λ sei. Wenn aber

2) $AA' \, . \, I'A' > 0$ ist, nur dann, falls λ nicht zwischen den beiden Grenzen

$$\lambda = \frac{A_1 I_1}{[\sqrt{AA'} \pm \sqrt{I'A'}]^2}$$

liegt.

Viel kürzer kommen wir indess zu denselben Resultaten, wenn wir die frühere Untersuchung über die Realität der Doppelpunkte im Falle, dass I, I', A, A' gegeben sind, benutzen.

Die Grenzwerthe werden dann, wenn $AA' . I'A' > 0$, aus

$$(A'I + A'I')^2 > 4AA' . I'A'$$

bestimmt zu:

$$A'I + A'I' \gtrless \pm 2\sqrt{AA' . I'A'}$$

Daraus folgt, dass

$$AI \gtrless \left(AA' + I'A' \pm 2\sqrt{AA' . I'A'} = (\sqrt{AA'} \pm \sqrt{I'A'})^2\right)$$

sein muss, wenn die Doppelpunkte reell sein sollen. Da nun die Lage von I aus der Gleichung $\lambda = \frac{A_1 I_1}{AI}$ mittels λ bestimmt wird, so gibt diese Bedingung die Determination, dass λ nicht zwischen die Grenzen fallen darf:

$$\frac{A_1 I_1}{(\sqrt{AA'} \pm \sqrt{I'A'})^2}.$$

Die Grenzuntersuchungen können sich bei Apollonius in mehrfacher Beziehung einfacher gestalten, da er immer nur specielle Lageverhältnisse untersucht. So genügt es auch, dass er nur die Grenzwerthe $\frac{A_1 I_1}{(\sqrt{AA'} \pm \sqrt{I'A'})^2}$ bestimmt, für welche die Doppelpunkte zusammenfallen (*modus singularis*, *μοναχός*). Ob λ grösser oder kleiner als diese sein muss, ergibt sich ihm, der stets nur an einer bestimmten Figur arbeitet, dann von selbst. Die Bestimmung dieser Grenzwerthe selber führt er auf einem andern und nicht so einfachen Wege aus, wie wir ihn soeben eingeschlagen haben.

Man wird aber das ausserordentliche Geschick bewundern müssen, mit dem Apollonius diese Complicationen auflöst, und die Behandlung einer quadratischen Ungleichung zu vermeiden weiss. Seine Lösung ist im Vorstehenden völlig enthalten und sie gibt, wie man sieht, die Construction sowohl wie die Determination für den allgemeinen Fall. Es ist aber charakteristisch für den Geist der Alten, dass er sie nicht direct auf diesen, sondern nur auf den speciellen Fall, dass A_1 im Durchschnitt der beiden Geraden liegt, anwendet, und auf diesen dann den allgemeinen folgendermaassen reducirt:*)

*) Halley gibt als Anhang seiner Uebersetzung der sect. rat. die allgemeine Lösung, wie wir.

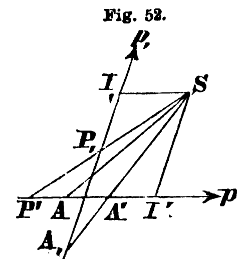
Wenn $A_1P_1 = \lambda AP$ sein und PP_1S auf einer Geraden liegen soll, so ziehe man p_1' durch A', den Durchschnitt von SA_1 mit p, parallel p_1 und bestimme μ so, dass $A_1S : A'S = \lambda : \mu$. Dann suche man P_1', so dass $A'P_1' = \mu AP$ nach jener speciellen Aufgabe, so wird auch:

$$A_1P_1 : A'P_1' = \lambda : \mu \quad \text{also} \quad A_1P_1 = \lambda AP.$$

Discussion einzelner Lagen.

I. Lage (erster τόπος des Apollonius); die Punkte mögen liegen, wie in beigezeichneter Figur. Die positiven Sinne der Geraden seien zunächst die in der Figur angedeuteten. Jetzt ist $A_1I_1 \, . \, I'A' < 0$, also zwei reelle Lösungen E, F vorhanden. Um zu finden, in welcher Gegend der Geraden p E und F liegen, untersuche man, welche Werthe der Quotient $\frac{A_1P_1}{AP'}$, wobei $P_1 \, P' \, S$ auf einer Geraden liegen, annehmen wird, wenn P' die Gerade p durchläuft:

Fig. 52.



$$\begin{array}{lcccccccccc} P' & = & -\infty & \ldots & A & \ldots & A' & \ldots & I' & \ldots & +\infty \\ \frac{A_1P_1}{AP'} & = & 0 & - & \infty & + & 0 & - & \infty & + & 0. \end{array}$$

Es wird also $\frac{A_1P_1}{AP'}$ den positiven Werth λ jedenfalls einmal zwischen AA' und einmal zwischen $I'\infty$ annehmen, und man sieht auch aus dieser einfachen Betrachtung, dass hier keine weiteren Determinationen nöthig sind.

Aendert man jetzt den Sinn einer der Geraden etwa von p_1, so ist jetzt $A_1I_1 \, . \, I'A' > o$; da aber gleichzeitig $AA' \, . \, I'A' < o$, so sind auch jetzt zwei Lösungen vorhanden. Und wenn man jetzt wieder

$$\begin{array}{lcccccccccc} P' & = & -\infty & \ldots & A & \ldots & A' & \ldots & I' & \ldots & +\infty \\ \frac{A_1P_1}{AP'} & = & 0 & + & \infty & - & 0 & + & \infty & - & 0 \end{array}$$

untersucht, so findet man, dass die beiden reellen Lösungen auf $-\infty A$ und $A'I'$ liegen.

Es gibt also, wenn wir nur die absolute Grösse der Strecken betrachten, 4 Punkte E, für welche $A_1E_1 = \lambda AE$,

die resp. auf den Strecken $-\infty A$, AA', $A'I'$, $I'\infty$ liegen, von denen aber die auf AA' und $I'\infty$ liegenden Punkte durch eine, die auf $-\infty A$, $A'I'$ liegenden durch eine andere Construction gefunden werden.

Apollonius verfährt nun so: Bei der in obiger Fig. 52 gezeichneten Lage verlangt er die Aufgabe zuerst so gelöst, dass E auf $-\infty A$ liegt; nachdem diese Aufgabe behandelt, verlangt er zweitens, man solle ein E suchen, welches auf AA' liegt und behandelt diese Aufgabe von neuem, u. s. f. So müsste er denn im Ganzen 4 Fälle betrachten, er hat aber in der That 5, weil er noch den ganz unwesentlichen Umstand mit berücksichtigt, ob E rechts oder links von dem Durchschnitte pp' in der Strecke AA' fällt (s. hierüber weitere Bemerkungen unten).

So verfährt nun Apollonius bei jeder Lage ursprünglicher Daten gegeneinander, und behandelt die 5 πτώσεις (*Casus*) immer nebeneinander mit derselben gründlichen Ausführlichkeit. Es sind im II. Buche, welches den allgemeinen Fall behandelt, 14 Lagen und 63 Fälle. (Das I. Buch *de sectione rationis*, welches das Problem unter den speciellen Voraussetzungen behandelt, dass p, p_1 parallel sind, oder der Durchschnitt von pp_1 mit dem Punkte A_1 zusammenfällt, hat 7 Lagen, 24 Fälle.) Dagegen wäre nun, von der grossen Weitschweifigkeit abgesehen, an und für sich nichts einzuwenden, wenn nicht dadurch der wesentliche Umstand verdeckt würde, dass zwei dieser Lösungen jedesmal durch eine und dieselbe Construction gefunden werden können; und insofern ist jene Zerspaltung in die einzelnen Fälle in der That ein Mangel wissenschaftlicher Methodik, der jedoch keineswegs dem Apollonius eigenthümlich, sondern überhaupt ein Charakterzug der griechischen Geometer ist, die zwei sich durch eine und dieselbe Construction ergebende Lösungen niemals als Lösungen einer und derselben Aufgabe betrachten, sondern überall, wo sie eine solche Mehrdeutigkeit wahrnahmen, die Aufgabe selbst auch in ebensoviele Fälle zerspalteten.

II. Lage (wie in Fig. 53). Der Sinn der Geraden p_1 mag zunächst der entgegengesetzte sein von dem in der Figur angegebenen. Dann ist $A_1 I_1 . I'A' < o$, also sind

zwei Lösungen reell vorhanden, die, wie man aus den Reihen

$$P' = -\infty \ldots A \ldots I' \ldots A' \ldots +\infty$$
$$\frac{A_1 P_1}{A P'} = \quad 0 \quad +\infty \quad -\infty \quad +0 \quad -0$$

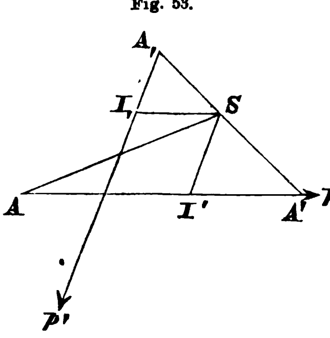
ersieht, auf den Strecken ∞A, $I' A'$ liegen.

Aendern wir aber jetzt den Sinn von p_1, so dass er mit dem in der Figur gezeichneten zusammenstimmt, so sehen wir, dass für

$$P' = -\infty \ldots A \ldots I' \ldots A' \ldots +\infty$$
$$\frac{A_1 P_1}{A P'} = \quad 0 \quad -\infty \quad +\infty \quad -0 \quad +0.$$

Das Verhältniss $\frac{A_1 P_1}{A P'}$ hat also nur zwischen A und I', sowie zwischen A' und ∞ positive Werthe, durchläuft aber nicht alle Werthe zwischen 0 und ∞, sondern steigt zwischen A und I' nur von ∞ herab bis zu einem gewissen Grenzwerthe, von dem an es sich wieder erhebt; liegt also λ über diesem Grenzwerthe, so gibt es zwischen A und I' zwei Punkte E, welche die Aufgabe lösen; liegt es unterhalb, so liegen auf dieser Strecke keine Punkte E. Umgekehrt verhält sich die Sache in dem Intervalle A' bis ∞; hier steigt das Verhältniss auf bis zu einem gewissen Grenzwerthe, von dem es dann wieder zu Null abfällt.

Fig. 53.



Genaue Bestimmungen dieser Grenzwerthe liefert uns nun unsere obige Untersuchung. Da jetzt $A_1 I_1 . I' A' > 0$, $AA' . I' A' > 0$, so muss λ ausserhalb der Grenzen

$$\frac{A_1 I_1}{[\sqrt{AA'} \pm \sqrt{I'A'}]^2}$$

liegen, wenn die Doppelpunkte reell sein sollen. Ist also

$$\lambda > \frac{A_1 I_1}{[\sqrt{AA'} - \sqrt{I'A'}]^2}$$

so gibt es zwei reelle Punkte E, welche zwischen A und I' liegen; ist

$$\lambda < \frac{A'I'}{[\sqrt{AA'}+\sqrt{I'A'}]^2}$$

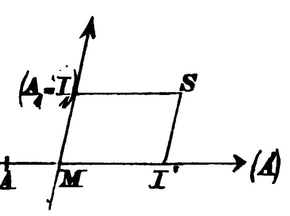
so liegen die beiden reellen Doppelpunkte zwischen A' und ∞. Ist endlich λ zwischen diesen beiden Grenzen enthalten, so gibt es keine reelle Lösung. Fällt λ mit einer der Grenzen zusammen, so fallen auch die beiden Doppelpunkte E, F in einen zusammen.

Nehmen wir alles zusammen, so sehen wir, dass bei dieser II. Lage, im Sinne des Apollonius entweder 4 oder 2 Lösungen möglich sind (oder 3, wenn λ einen jener Grenzwerthe annimmt).

III. Lage. Hier falle A_1 mit I_1 zusammen. Dann ist, wenn der Sinn wie in Fig. 54 genommen wird,

$$P' \quad = -\infty \ldots A \ldots I' \ldots +\infty$$
$$\frac{A_1P_1}{AP'} = \quad 0 \quad +\infty \quad -\infty \qquad +0$$

Fig. 54.



und es liegt somit jedenfalls eine Lösung zwischen $-\infty$ und A und eine andere zwischen $I'\infty$. Nach unseren obigen allgemeinen Kriterien lässt sich dies nicht ohne Weiteres entscheiden, weil jetzt $A_1I_1 = 0$.

Kehrt man das Zeichen von p_1 um, so hat man:

$$P' \quad = -\infty \ldots A \ldots I' \ldots +\infty$$
$$\frac{A_1P_1}{AP'} = \quad 0 \quad -\infty \quad +\infty \qquad -0$$

Es können also jetzt zwei Lösungen auf der Strecke AI' liegen, wenn λ oberhalb einer gewissen Grenze liegt.

Betrachten wir nun die beiden Grenzen:

$$\lambda = \frac{A_1I_1}{[\sqrt{AA'} \pm \sqrt{I'A'}]^2}$$

in dem Falle, wo A_1 mit I_1 zusammenfällt, also A' in's Unendliche rückt, so bringen wir die Relation

$$A_1I_1 \,.\, I'A' = MI_1 \,.\, I'M$$

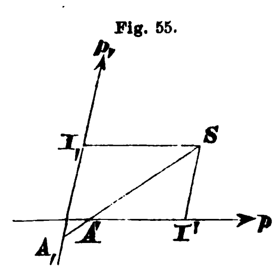
in Anwendung, wo M den sich selbst homologen Schnittpunkt von pp_1 bezeichnet; ferner ist $AA' = AI' + I'A'$ also:

$$\lambda = \frac{I_1 M . MI'}{\overline{I'A'}^2 [\sqrt{1 + \frac{AI'}{I'A'}} \pm 1]^2}$$

Die eine dieser Grenzen wird, wenn A' in's Unendliche rückt, gleich 0, die andere:

$$\frac{4 MI_1 . MI'}{\overline{AI'}^2}.$$

Das ist also jener Werth, unter den λ nicht sinken darf, wenn es innerhalb A und I' reelle Lösungen geben soll.



IV. Lage. Es fällt A mit I' zusammen, dann liegen, wenn der Sinn, wie in Fig. 55 angenommen wird, zwei reelle Lösungen auf $A'I'$ und $I'\infty$. Wird er entgegengesetzt angenommen, so liegen zwei reelle auf $-\infty A'$, wenn $\lambda < \frac{I_1 A_1}{4 A'I'}$.

§. 2.

Sectio spatii (περὶ χωρίου ἀποτομῆς).

Es seien in derselben Ebene zwei unbegrenzte gerade Linien p, p_1, in jeder derselben ein Punkt U, I_1', und ein Punkt S ausserhalb derselben, sowie ausserdem ein Flächenraum q^2 gegeben. Man soll durch S eine gerade Linie EE_1 ziehen, welche von den gegebenen Geraden Segmente UE, $I_1'E_1$ abschneidet, deren Rechteck dem gegebenen Flächenraum q^2 gleich ist: $UE . I_1'E_1 = q^2$.

Es sei der Sinn der Geraden beliebig festgesetzt, und man suche zu jedem P_1 das zugehörige P nach der Relation:

$$UP . I_1'P_1 = q^2$$

so sind P, P_1 projectivisch mit den Fluchtpunkten $U_1 I_1'$. Zieht man ferner P, S und nennt den Schnittpunkt mit p, P', so sind P, P' zu einander projectivisch. Die Doppelpunkte E, F dieser beiden Punktreihen lösen die Aufgabe. Um sie zu finden, hat man, wenn I_1, U' die Fluchtpunkte der Beziehung von P_1, P' sind, zunächst den Punkt J aus

$$UJ . I_1'I_1 = q^2$$

zu bestimmen. Dann hat man, wenn I' den Durchschnitt von SI_1' mit p bezeichnet, folgende Paare homologer Punkte:

$$\begin{array}{llll} P_1 = I_1' & \infty & I_1 \\ P = \infty & U & J \\ P' = I' & U' & \infty \end{array}$$

Fig. 56.

und daher:

$$JP \,.\, I'P' = JU \,.\, I'U',$$

also E aus

$$JE \,.\, I'E = JU \,.\, I'U'$$

zu bestimmen, was nach der schon bei der *sectio rationis* gelehrten Methode geschieht. Ganz wie dort, wird auch jetzt die projectivische Beziehung durch die beiden Fluchtpunkte JI' und ein Paar homologer Punkte gegeben und die Kriterien der Realität sind wörtlich dieselben, nur bemerke man, dass $UJ \,.\, I_1'I_1 = q^2$ also $UJ, I_1'I_1$ von demselben Zeichen sind.

Die Doppelpunkte sind nämlich reell:

I. Wenn $I_1'I_1 \,.\, I'U' < 0$ in jedem Falle.

II. Wenn $I_1'I_1 \,.\, I'U' > 0$ und gleichzeitig

1) $UU' \,.\, I'U' < 0$ ist, in jedem Falle. Wenn aber
2) $UU' \,.\, I'U' > 0$,

so muss die Bedingung $(U'J + U'I')^2 > 4UU' \,.\, I'U'$ erfüllt sein, aus welcher sich für UJ:

$$UJ \gtrless UU' + I'U' \pm \sqrt{2UU' \,.\, I'U'} = (\sqrt{UU'} \pm \sqrt{I'U'})^2$$

ergibt, und da $UJ \,.\, I_1'I_1 = q^2$, die Bedingung, dass q^2 nicht zwischen den Grenzen

$$I_1'I_1\,(\sqrt{UU'} \pm \sqrt{I'U'})^2$$

liegen darf, falls die Doppelpunkte reell sein sollen.

Die Lösung, welche Halley von der *sect. spatii* gegeben hat, und deren Determinationen unterscheiden sich nicht von den vorstehenden.

Beispiel einer bestimmten Lage. Es sei die Lage, wie in der Figur 56 gezeichnet; die Richtungen der Geraden die angegebenen. Dann ist $I_1'I_1 \,.\, I'U' > 0$, $UU' \,.\, I'U' > 0$

und es muss daher entweder $\lambda > I_1'I_1\,(\sqrt{UU'} + \sqrt{I'U'})^2$ sein (dann liegen die Punkte EF zwischen $U'\infty$) oder

$$\lambda < I_1'I_1\,(\sqrt{UU'} - \sqrt{I'U'})^2$$

sein (dann liegen EF auf UI') Wird der Sinn von p vertauscht, so gibt es wegen $I_1'I_1 \,.\, I'U' < 0$ zwei reelle Lösungen auf $-\infty U, I'U'$.

§. 3.

Sectio determinata (περὶ διωρισμένης τομῆς).

Es sind auf einer Geraden die 4 Punkte $AA'BB'$ und eine positive oder negative Constante λ gegeben. Es soll der Punkt E gefunden werden, für welchen:

$$\frac{A'E}{EB'} = \lambda \frac{AE}{EB}.$$

Lässt man P' die Punkte der Geraden durchlaufen, und construirt zu jedem P' den aus

$$\frac{A'P'}{P'B'} = \lambda \frac{AP}{PB}$$

entsprechenden Punkt P, so durchläuft P eine zu P' projectivische Punktreihe und die Doppelpunkte EF beider werden die Aufgabe lösen.

Um dieselben zu construiren, wird man etwa zunächst die Fluchtpunkte der beiden Punktreihen J, I' aus:

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{AJ}{JB}, \quad -\lambda = \frac{A'I'}{I'B'}$$

bestimmen; dann ist E zu finden aus

$$JE \,.\, I'E = \pi$$

wo: $$\pi = JA \,.\, I'A' = JB \,.\, I'B'.$$

Es sind nun noch die Determinationen zu geben. Dazu gehen wir von der Gleichung

$$4\,\overline{OE}^2 = \overline{JI'}^2 + 4\,\pi$$

aus, wo O den Mittelpunkt von JI' bedeutet; da

$$JB = AB\,\frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad I'B' = -A'B'\,\frac{1}{\lambda - 1}$$

so hat man: $$\pi = -AB \,.\, A'B'\,\frac{\lambda}{(\lambda - 1)^2},$$

$$JI' = JB + BB' + B'I' = \frac{\lambda AB' + A'B}{\lambda - 1};$$

also sind die Doppelpunkte jedenfalls reell, wenn

$$\lambda\, AB\,.\,A'B' < 0.$$

Ist aber

$$\lambda\,.\,AB\,.\,A'B' > 0$$

so haben wir die Bedingung

$$(\lambda\, AB' + A'B)^2 - 4\lambda\, AB\,.\,A'B' > 0$$

weiter zu analysiren. Setzen wir zur Abkürzung

$$r = AB\,.\,A'B', \qquad s = A'A\,.\,B'B$$

und benutzen die Identität

$$A'B\,.\,AB' = r - s,$$

so haben wir an Stelle jener Bedingung:

$$\lambda^2\,.\,\overline{AB'}^2 - 2\lambda\,(r+s) + \overline{A'B}^2 > 0$$

$$(\lambda\,.\,\overline{AB'}^2)^2 - 2\lambda\,\overline{AB'}^2\,(r+s) + (r-s)^2 > 0$$

oder

$$[\lambda\,.\,\overline{AB'}^2 - (r+s)]^2 - 4rs > 0$$

Ist nun $rs < 0$, d. h.

$$AB\,.\,A'B'\,.\,AA'\,.\,BB' < 0$$

oder was jetzt dasselbe ist:

$$\lambda\,.\,AA'\,.\,BB' < 0,$$

so sind die Doppelpunkte jedenfalls reell. Ist aber

$$\lambda\,.\,AA'\,.\,BB' > 0,$$

so darf λ nicht zwischen den Grenzen:

$$\frac{r+s \pm 2\sqrt{rs}}{AB'}$$

liegen, innerhalb deren der Ausdruck:

$$[\lambda\,.\,\overline{AB'}^2 - (r+s)]^2 - 4rs$$

der für $\lambda = \pm\infty$ positiv ist, negativ wird. — Wir haben somit das Resultat gefunden:

Die Doppelpunkte sind reell

I. Wenn $\lambda\,.\,AB\,.\,A'B' < 0$ ist, in jedem Falle.

II. Wenn $\lambda\,.\,AB\,.\,A'B' > 0$ ist und gleichzeitig

1) $\lambda\,.\,AA'\,.\,BB' < 0$, was auch λ sei. Wenn aber

2) $\lambda\,.\,AA'\,.\,BB' > 0$.

ist, nur, falls λ ausserhalb der Grenzen

$$\left(\frac{\sqrt{AB \,.\, A'B'} \pm \sqrt{AA' \,.\, BB'}}{AB'}\right)^{2}\text{*)}$$

liegt.

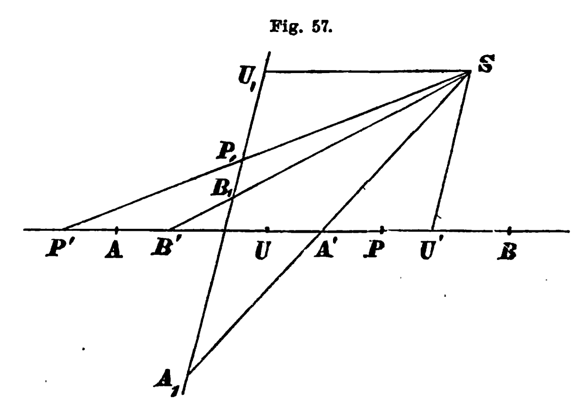
§. 4.

Allgemeinere Aufgabe, welche die des Apollonius in sich als specielle Fälle enthält.

Es sind zwei Gerade p, p_1, in jeder derselben zwei Punkte A, B, A_1, B_1 und ein constantes Verhältniss μ gegeben. Es soll durch einen ausserhalb der Geraden gelegenen Punkt S eine Linie gezogen werden, welche p, p_1 in Punkten EE_1 schneidet, so dass

$$\frac{A_1 E_1}{E_1 B_1} = \mu \frac{AE}{EB}.$$

Fig. 57.



Oder anders ausgedrückt: Es sind auf zwei Geraden p, p_1 zwei projectivische Punktreihen P, P_1 gelegen, deren Beziehung durch zwei Paare homologer Punkte $AA_1\, BB_1$ und durch die Constante μ vermittels der Gleichung:

$$\frac{A_1 P_1}{P_1 B_1} = \mu \frac{AP}{PB}$$

---

*) Die Grenzen des Apollonius sind die auch hier gefundenen; es ist dies die berühmte Aufgabe *de maximis et minimis.* — Die Schrift ist von Simson wieder hergestellt; s. Paucker, d. geom. Analysis.

Eine elegante Auflösung mittels der Lehre von der Involution s. Chasles, Traité p. 201.

bestimmt ist. Es soll diejenige Verbindungslinie homologer Punkte EE_1 gesucht werden, welche durch einen gegebenen Punkt S geht.

Bezeichnen wir mit P' den auf $P_1 S$ liegenden Punkt von p, so sind P' mit P projectivisch. Nennen wir $A'B'$ die Durchschnitte von $A_1 S$, $B_1 S$ mit p, so sind AA', BB' homologe Punkte und es kann die Beziehung von P zu P' durch:

$$\frac{A'P'}{P'B'} = \lambda \frac{AP}{PB}$$

dargestellt werden, wo um λ zu bestimmen, noch ein Paar homologer Punkte aufgesucht werden muss. Sind nun U_1, U' die beiden Fluchtpunkte der Systeme P_1, P', so entspricht $P' = U'$ dem $P_1 = \infty$. Bestimmen wir nun den $P_1 = \infty$ entsprechenden Punkt $P = U$ aus

$$\mu \frac{AU}{UB} = -1,$$

so sind U, U' entsprechende Punkte und es muss:

$$\frac{A'U'}{U'B'} = \lambda \frac{AU}{UB}$$

sein; eliminiren wir den Punkt U, so haben wir:

$$\mu = -\frac{U'B'}{A'U'} \lambda, \qquad \lambda = -\mu \frac{A'U'}{U'B'}.$$

Nun sind P, P' zwei durch die Gleichung

$$\frac{A'P'}{P'B'} = \lambda \frac{AP}{PB}$$

verbundene projectivische Punktreihen, deren Doppelpunkte, da AA', BB' unmittelbar, λ aber durch die vorstehende Relation gegeben ist, nach der *Sectio determinata* bestimmt werden können.

Reell sind daher die Doppelpunkte:

I. Wenn $+\mu \frac{A'U'}{U'B'} AB \,.\, A'B' > 0$ ist, in jedem Falle.

II. Wenn $+\mu \frac{A'U'}{U'B'} \,.\, AB \,.\, A'B' < 0$ ist und gleichzeitig:

1) $-\mu \frac{A'U'}{U'B'} AA' \,.\, BB' < 0$ oder was dasselbe aussagt:

$AB \,.\, A'B' \,.\, AA' \,.\, BB' < 0$ ist, was auch μ sei;

wenn aber

2) $-\mu \frac{A'U'}{U'B'} AA' \,.\, BB' > 0$, das heisst:

$AB \,.\, A'B' \,.\, AA' \,.\, BB' > 0$ ist nur, falls μ ausserhalb der Grenzen: $\frac{U'B'}{U'A'}\left(\frac{\sqrt{AB.A'B'} \pm \sqrt{AA'.BB'}}{AB'}\right)^2$ liegt.

So haben wir dies allgemeine Problem ganz auf die *sect. determinata* zurückgeführt; es enthält aber zugleich die *sect. rationis* und *sect. spatii* als specielle Fälle, und es ist interessant, deren Determinationen aus vorstehenden abzuleiten.

Um von unserer Aufgabe, wo

$$\frac{A_1P_1}{P_1B_1} = \mu \frac{AP}{PB}$$

zu der *sect. rationis* überzugehen, wo

$$A_1P_1 = \mu AP,$$

müssen wir B, B_1 als homologe Punkte ansehen, die in's Unendliche gerückt sind, so dass für zwei endliche Punkte PP_1 immer $\frac{P_1B_1}{PB} = 1$. Da nun PP' durch die Gleichungen $U'P' \,.\, U_1P_1 =$ const. zusammenhängen, so ist:

$$U'B' \,.\, U_1B_1 = U'A' \,.\, U_1A_1$$

oder da $U_1B_1 = UB$, so hat man:

$$\frac{A'U'}{U'B'} = \frac{UB}{A_1U_1}.$$

Da nun $\frac{AB}{UB} = 1$, ferner B', wenn $B_1 = \infty$, mit U' zusammenfällt, so sind die Doppelpunkte reell, wenn $\mu . A_1U_1 . A'U' > 0$, in jedem Falle.

Wenn $\mu . A_1U_1 . A'U' < 0$ und gleichzeitig $\mu . A_1U_1 . AA' < 0$, so sind die Doppelpunkte auch reell; wenn aber

$$\mu \,.\, A_1U_1 \,.\, AA' > 0,$$

so darf μ nicht zwischen den Grenzen

$$\left(\sqrt{B'A'} \pm \sqrt{AA'}\sqrt{\frac{BB'}{BA}}\right)^2 \quad \frac{A_1U_1}{AB'^2} \cdot \frac{BA}{BU}$$

liegen; da nun $\frac{BA}{BU} = 1$, $\frac{BB'}{BA} = 1$ und $B' = U'$, so werden die Grenzen:

$$\left(\frac{\sqrt{U'A'} \pm \sqrt{AA'}}{AB'}\right)^2 A_1U_1 \quad .$$

oder:
$$\frac{A_1 U_1}{(\sqrt{AA'} \pm \sqrt{U'A'})^2},$$
ganz im Einklange mit dem Früheren.

Um zu der *Sectio spatii* überzugehen, müssen wir $A = \infty$, $B_1 = \infty$ setzen, so dass $B' = U'$, und müssen zugleich μ als eine unendlich kleine Grösse betrachten, so dass
$$-\mu \, . \, AP \, . \, P_1 B_1 = q^2$$
einer endlichen Grösse gleich wird, wenn P und P_1 beliebig im Endlichen gelegene Punkte sind; dann wird in der That:
$$A_1 P_1 \, . \, BP = q^2.$$

Wir wollen ferner noch zeigen, wie sich jetzt die Grenzen für q^2 gestalten. Es muss μ liegen zwischen:
$$\frac{U'B'}{U'A'} \frac{AB}{AU'^2} (\sqrt{A'U'} \pm \sqrt{BU'} \sqrt{\frac{AA'}{AB}})^2$$
oder, da $A = \infty$, zwischen:
$$\frac{U'B'}{U'A'} \frac{AB}{AU'^2} (\sqrt{A'U'} \pm \sqrt{BU'})^2.$$
Nun enthält $U'P' \, . \, U_1 P_1 = \text{const.}$ die projectivische Relation von P', P_1; es ist daher:
$$U'B' \, . \, U_1 B_1 = U'A' \, . \, U_1 A_1, \quad \frac{U'B'}{U'A'} = \frac{U_1 A_1}{U_1 B_1}.$$
Demnach sind die Grenzfälle:
$$\mu = \frac{U_1 A_1}{U_1 B_1} \frac{AB}{AU'^2} (\sqrt{A'U'} \pm \sqrt{BU'})^2,$$
oder:
$$-\mu \, . \, AU' \, . \, U_1 B_1 = A_1 U_1 (\sqrt{A'U'} \pm \sqrt{BU'})^2 \frac{AB}{AU'}.$$
Nun ist $-\mu \, . \, AU' \, . \, U_1 B_1 = q^2$, $\frac{AB}{AU'} = 1$ und es muss daher q^2 ausserhalb der Grenzen
$$A_1 U_1 (\sqrt{A'U'} \pm \sqrt{BU'})^2$$
liegen — was ganz mit den früheren Determinationen übereinstimmt.

Fünfter Abschnitt.

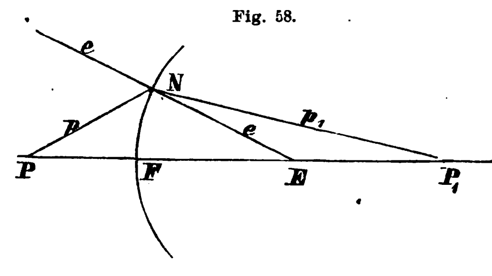
Theorie eines Linsensystemes.

§. 1.

Die dioptrischen Bilder nach einmaliger Brechung.*)

Fällt ein Lichtstrahl p auf ein brechendes Medium in einem Punkte N und sei e die Normale zu der trennenden Fläche in diesem Punkte, so wird der Strahl gebrochen und nimmt in der durch die Linien p und e bestimmten Ebene eine Richtung p_1 an, welche, wenn n den Brechungsexponenten bedeutet, p, p_1 aber in der Richtung des Lichtstrahles positiv gerechnet werden, aus der bekannten Gleichung:

Fig. 58.



1) $$\frac{\sin (p e)}{\sin (p_1 e)} = n$$

bestimmt wird, wie auch der Sinn für die Richtung von e gewählt sein möge. Diese Descartes'sche Form kann nun zunächst umgestaltet werden, indem wir eine beliebige Transversale a einführen, welche von p, p_1, e in den Punkten P, P_1, E geschnitten wird. Dann ist:

$$\frac{\sin (p e)}{\sin (a e)} = \frac{PE}{PN} \qquad \frac{\sin (p_1 e)}{\sin (a e)} = \frac{P_1 E}{P_1 N}$$

also:

2) $$\frac{EP}{PN} : \frac{EP_1}{P_1 N} = n.$$

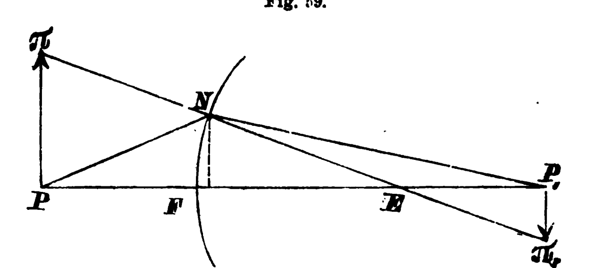
---

*) Möbius: Entwickelung der Lehre von den dioptrischen Bildern mit Hülfe der Collineationsverwandtschaft. (Berichte der Sächs. Gesellsch. Math. phys. Classe. 1855. pag. 8—32.)

Diese Gleichung liefert, wenn a parallel e gezogen wird, der Punkt E also in's Unendliche rückt, die von Snellius dem Brechungsgesetze ursprünglich gegebene Form.

Wir machen nun die Voraussetzung, dass das brechende Medium durch eine Kugelfläche (oder in der Ebene durch einen Kreis) begrenzt sei und legen die Linie a durch den Mittelpunkt dieser Kugel. Ferner betrachten wir nur solche Lichtstrahlen, deren Richtung mit dieser Linie, welche die Axe genannt werden soll, sehr kleine Winkel bilden, so dass auch sämmtliche Punkte, in welchen die Lichtstrahlen die brechende Fläche treffen, von der Axe wenig entfernt liegen. Wir werden dann die Grössen, welche mit dem Quadrate dieser Entfernungen von gleicher Ordnung sind, vernachlässigen dürfen, ohne dabei von einer genauen Theorie der wirklich stattfindenden Beziehungen erheblich abzuweichen. Beachtet man, dass, wenn der Durchschnitt

Fig. 59.



der brechenden Fläche mit der Axe F genannt wird, sich PN, P_1N von PF, P_1F nur um Grössen zweiter Ordnung unterscheiden*), so hat man, wenn solche vernachlässigt werden, die Gleichung:

---

*) Setzt man die Winkel $\sphericalangle NPE = \alpha$, $\sphericalangle PEN = \beta$, wobei dann $\sin\beta = \frac{PN}{NE}\sin\alpha$ wird, so ist $PF = PN(\cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{tang}\frac{\beta}{2})$. Da aber bei der Entwickelung der goniometrischen Functionen in Reihen, welche nach Potenzen von α fortschreiten, die Anfangsglieder derselben lauten:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}\ldots \quad \sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6}\ldots \quad \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^3}{24}\ldots\ldots$$

so werden, falls PF direct gleich PN gesetzt wird, nur solche Glieder vernachlässigt, in denen α mindestens zur zweiten Potenz oder aber das Product $\alpha\beta$ vorkommt. Fasst man nun den Werth von α in den

3) $$\frac{EP}{PF} : \frac{EP_1}{P_1F} = n.$$

Da diese Gleichung vom Werthe α völlig unabhängig ist, so lässt sich aus derselben der Satz erschliessen: Berücksichtigt man nur solche von P ausgehende Strahlen, die einen kleinen Winkel mit der Axe bilden (für welche FN unendlich klein von der ersten Ordnung ist), so vereinigen sich diese nach der Brechung sämmtlich wiederum in einem Punkte P_1 (d. h. sie schneiden die Axe innerhalb einer Strecke, welche von der zweiten Ordnung ist). Ist demnach P ein in der Axe gelegenes Object, so erscheint in P_1 dessen Bild wieder auf der Axe.

Ist Π ein zweites Object, welches von der Axe einen kleinen Abstand erster Ordnung hat und senkrecht über P liegt, so befindet sich sein Bild auf der Linie ΠE in Π_1, und zwar wird Π_1, wenn N den Durchschnitt des Strahles ΠE mit der brechenden Fläche bezeichnet, aus der Relation gefunden: $\frac{E\Pi}{\Pi N} : \frac{E\Pi_1}{\Pi_1 N} = n$. Nun unterscheidet sich der Fusspunkt des von N auf die Axe gefällten Perpendikels nur um Grössen zweiter Ordnung von F; wir dürfen daher $\frac{EP}{PF} = \frac{E\Pi}{\Pi N}$ und damit auch $\frac{EP_1}{P_1F} = \frac{E\Pi_1}{\Pi_1 N}$ setzen, woraus hervorgeht, dass die Dreiecke ENF und $E\Pi_1 P_1$ ähnlich sind, also auch Π_1 senkrecht unter P_1 liegt. Das Bild Π_1 eines Punktes Π, welcher in einer zur Axe im Punkte P senkrechten Ebene liegt, erscheint also in einer Ebene, die in demjenigen Punkte P_1 normal zur Axe steht, in welchem das Bild P_1 des Punktes P erscheinen würde.

Man erhält das Bild jedes Punktes Π in jener Ebene, indem man den Schnittpunkt des durch den Mittelpunkt gehenden Strahles ΠE mit der in P_1 errichteten senkrechten Ebene sucht. Das Bild

---

vorkommenden Rechnungen als kleine Grössen erster Ordnung auf, so ist auch β von derselben Ordnung. Die Annahme $PF = PN$ ist dann bis auf kleine Grössen der zweiten Ordnung (und aller weiteren höheren Ordnungen) richtig.

jeder Figur in einer solchen Ebene ist daher der Figur selber ähnlich.

Die lineare Vergrösserung des Bildes wird durch das Verhältniss:

$$P_1 \Pi_1 : P\Pi = EP_1 : EP \qquad 4)$$

gemessen, und zwar ist das Bild aufrecht oder verkehrt, je nachdem EP, EP_1 von demselben oder von entgegengesetztem Sinne sind, d. h. die vorstehende Gleichung gilt der Grösse und dem Sinne der Strecken nach.

Wenn so das Bild eines räumlichen Objectes in allen zur Axe senkrechten Ebenen dem Objecte selbst ähnlich ist, so wird, falls das Object aus einem auf der Axe gelegenen leuchtenden Punkte besteht, dieser Punkt mit seinem Bildpunkte stets projectivisch verwandt werden. Denn aus der Beziehung $\frac{EP}{PN} : \frac{EP_1}{PN_1} = n$ geht hervor: Einer Reihe von Objectpunkten P auf der Axe entspricht eine zu dieser projectivische Reihe von Bildpunkten P_1; der Mittelpunkt E der Kugel und ihr Scheitel F sind die beiden Doppelpunkte dieser projectivischen Reihen, deren Beziehung ausser durch E und F noch durch den Brechungsexponenten n bestimmt ist. Diese projectivische Beziehung zwischen Licht- und Bildpunkt kann noch mehrfach auf bemerkenswerthe Weise ausgedrückt werden. Zunächst ist hier an die Transformation des Doppelverhältnisses $(E F P P_1) = n$ zu erinnern, welche auf die Gleichungen führt (pag. 101):

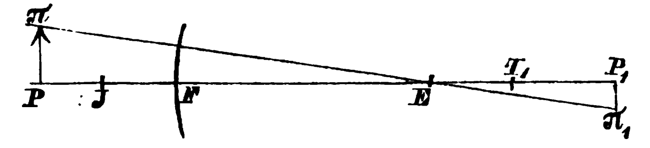
$$\frac{n}{FP_1} + \frac{1}{PF} = \frac{n-1}{r} \qquad \frac{n}{PE} + \frac{1}{EP_1} = \frac{n-1}{r} \qquad 5)$$

Bestimmt man sodann die Fluchtpunkte J, I_1 beider Reihen, welche durch die Gleichungen:

$$\frac{EJ}{JF} = -n \qquad \frac{EI_1}{I_1 F} = -\frac{1}{n} \qquad 6)$$

gefunden werden, so sind das jetzt zugleich die Brennpunkte in optischem Sinne. Denn zu einem leuchtenden Punkte in J gehört ein im Unendlichen gelegener Bildpunkt, d. h. alle Strahlen werden in diesem Falle parallel zu einander gebrochen, und umgekehrt: Treffen die Lichtstrahlen parallel zur Axe auf die convexe Seite der brechenden

Fig. 60.



Fläche, so werden sie in dem Punkte I_1 vereinigt. Man nennt die Strecken $JF = EI_1$ und $FI_1 = JE$ die Hauptbrennweiten und es bestehen für diese, wenn wir mit r den Radius der Kugel FE auch dem Sinne nach bezeichnen, gemäss der Gleichung (5), die Beziehungen:

$$7) \qquad JF = EI_1 = \frac{r}{n-1} \qquad JE = FI_1 = \frac{nr}{n-1}.$$

In Bezug auf die Brennpunkte hat man nun:

$$JP \,.\, I_1P_1 = -q^2$$

wobei die Constante $-q^2$ sich aus der Relation:

$$8) \qquad -q^2 = JF \,.\, I_1F = -n \,.\, \left(\frac{r}{n-1}\right)^2$$

bestimmt und für das folgende vorausgesetzt werden soll, dass $q = \sqrt{n} \,.\, \frac{r}{n-1}$, wo $\sqrt{n}$ positiv gewählt ist. Man mag auch hier $-q^2$ die Potenz nennen.

Da das Product $JP \,.\, I_1P_1$ negativ ist, so sind die beiden projectivischen Reihen gleichsinnig gelegen, d. h. Object und Bild bewegen sich bei einer Verschiebung auf der Axe nach gleicher Richtung. Rückt in Fig. 60, bei welcher $n > 1$ angenommen ist, der leuchtende Punkt aus dem Unendlichen auf die convexe Seite der Fläche zu, so bewegen sich auch die Bildpunkte nach der gleichen Richtung vom Brennpunkte I_1 an immer weiter hinaus. Befindet sich dann das Object im Brennpunkt J, so vereinigen sich die gebrochenen Strahlen im Unendlichen; liegt das Object zwischen J und F, so befindet sich der Bildpunkt auf der linken Seite von F. Das Bild ist in diesem Falle ein virtuelles geworden, das heisst die an der Fläche gebrochenen Lichtstrahlen divergiren und schneiden sich nur dann in einem Punkte, wenn ihre Linien nach der entgegengesetzten Seite verlängert gedacht werden; im Punkte F endlich fallen Object und Bildpunkt zusammen.

Die bisherige Ableitung gilt zunächst nur für alle diejenigen Lagen des leuchtenden Punktes, bei welchen die Lichtstrahlen auf die convexe Seite der brechenden Fläche auffallen; wir werden indess dieselben, wie eine einfache Untersuchung zeigt, auch auf den anderen Fall übertragen können. Zu dem Zwecke denken wir uns den Punkt P_1 als leuchtenden Punkt; die von ihm ausgehenden Strahlen treten an das concav gekrümmte Medium heran und es sei jetzt $n < 1$ der Brechungsexponent aus dem ersten ins zweite Mittel. Wenn wir dann P den Bildpunkt nennen, so erhalten wir die Gleichung: $\frac{\sin(p_1 e)}{\sin(p e)} = n$. Untersucht man also unter der Voraussetzung $n < 1$ leuchtende Punkte, deren Strahlen die concave Seite der brechenden Fläche treffen, so können wir in den vorhergehenden Formeln für n einfach seinen reciproken Werth setzen, oder was das nämliche bedeutet, in dem Doppelverhältniss $(EFPP_1) = n$ die Punkte P und P_1 vertauschen. Diese Aenderung besagt aber, dass alle diejenigen Punkte, welche früher in der Beziehung von Object und Bild standen, nunmehr in der umgekehrten Beziehung von Bild und Object zu einander stehen. Auf diese Weise wechseln auch, wie aus den Gleichungen 7) hervorgeht, die beiden Brennpunkte J und I_1 ihre Bedeutung: Fallen nämlich (Fig. 60) die Strahlen parallel der Axe auf die concave Seite der Fläche auf, so werden sie jetzt im Punkte J vereinigt, und umgekehrt: Befindet sich das Object im Punkte I_1, so werden die Strahlen parallel der Axe gebrochen. Rückt der leuchtende Punkt von F nach E, so bewegt sich das Bild, welches virtuell ist, gleichfalls von F nach E, anfangs zurückbleibend, im Punkte E dagegen mit dem Objecte wiederum zusammenfallend. Ist das Object in den Punkt I_1 gelangt, so ist das Bild während dessen in's Unendliche gerückt; bei weiterem Fortrücken werden von nun an die Bilder reell, d. h. sie liegen auf der Seite der convergirend austretenden Strahlen. Die Bewegung des Objectes und des Bildes sind auch in diesem Falle gleichgerichtet; überhaupt bleibt der Werth der Potenz bei Aenderung von n in $\frac{1}{n}$ der gleiche.

Diese Discussion der Lagenbeziehung von Object und Bildpunkt ist im ersten Falle unter der Bedingung $n > 1$ geführt

worden. Nimmt man dagegen $n < 1$ an, so werden gemäss der Gl. 6) die Brennpunkte J und I_1 so zu sagen ihre Bedeutung vertauschen, d. h. I_1 fällt nun auf die linke Seite, J auf die rechte von F aus. Dem entsprechend ergibt eine einfache, der bisherigen ganz gleichartige Betrachtung den Satz: Bei Eintritt der Lichtstrahlen in ein Medium mit convex gekrümmter, kugelförmiger Grenzfläche, für welches $n < 1$ wird, oder in ein Medium mit concaver Grenzfläche, für welches $n > 1$ wird, sind die entstehenden Bilder in allen Lagen des Objectes virtuell.

Es möge ferner hier noch erwähnt werden, dass, wenn $n = -1$ gesetzt wird, die vorstehenden Betrachtungen sich auf den Fall der Reflexion eines Lichtstrahles an einer kugelförmig gekrümmten Fläche beziehen (Convex- oder Concav-Spiegel). Denn alsdann bildet der zurückfallende Strahl mit der Normale den entgegengesetzt gleichen Winkel wie der einfallende Strahl mit der nämlichen Normale. Die projectivischen Punktreihen P und P_1 werden in diesem Falle involutorische, d. h. es liegen Object und Bildpunkt in Bezug auf die Punkte E und F harmonisch. Die beiden Fluchtpunkte I und J fallen in den einen Brennpunkt zusammen, der dem unendlich fernen Punkte in Bezug auf die Punkte E und F harmonisch zugeordnet ist, d. h. in der Mitte M des Radius $r = FE$ sich befindet. Es ist zufolge der harmonischen Lage dann ohne weiteres deutlich, dass bei der Reflexion an kugelförmigen Convexspiegeln die Bilder stets virtuell, dagegen bei Concavspiegeln dann reell ausfallen, wenn der leuchtende Punkt von der reflectirenden Fläche weiter entfernt liegt als der Punkt M. Da n in diesem Falle negativ ist, so wird $q^2 < 0$, die Bewegung innerhalb der von dem Objecte gebildeten Punktreihe ist der Bewegung zugehöriger Bildpunkte entgegengerichtet.

Kehren wir zu dem allgemeinen Falle der Brechung wieder zurück. Sind A, A_1 zwei homologe Punkte, so kann die projectivische Beziehung bekanntlich in die Form gebracht werden:

9) $AP . A_1P_1 + \lambda A_1P_1 + \lambda_1 AP = 0$ oder $1 = \frac{\lambda}{PA} + \frac{\lambda_1}{P_1A_1}$,

wobei $\lambda = JA$, $\lambda_1 = I_1 A_1$, so dass der Gleichung die Form gegeben werden kann:

$$\frac{JA}{PA} + \frac{I_1 A_1}{PA_1} = 1.$$

Nimmt man nun $A = A_1 = F$ an, so hat man

$$\frac{JF}{PF} + \frac{I_1 F}{P_1 F} = 1 \text{ und ebenso } \frac{JE}{PE} + \frac{I_1 E}{P_1 E} = 1. \quad 10)$$

Dies ist die gebräuchlichste Formel, um die Beziehung zwischen den Entfernungen des Objectes und des Bildes von dem Scheitel der brechenden Fläche (Brennweiten) vermittelst der Hauptbrennweiten auszudrücken. Die Formel für die Vergrösserung, gemessen nach einer Dimension,

$$\Pi_1 P_1 : \Pi P = EP_1 : EP$$

nimmt jetzt, da nach Gl. 10):

$$EP_1 : EP = EI_1 : JP$$

die Form an:

$$\Pi_1 P_1 : \Pi P = EI_1 : JP = \frac{r}{n-1} : JP = \frac{q}{\sqrt{n}} : JP \quad 11)$$

d. h. die Vergrösserung des Objectes ist durch den Brechungsexponenten, die Entfernung von der brechenden Fläche und den Radius derselben bestimmt.

§. 2.

Graphische Darstellung der Brechung.

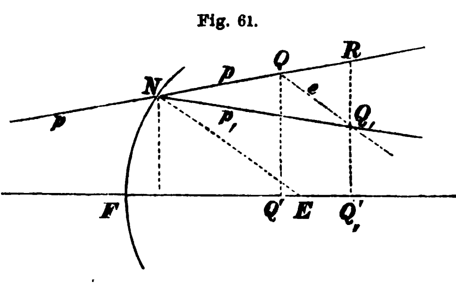
Um den Gang eines Lichtstrahles p nach der Brechung darzustellen, nehmen wir auf dem (etwa verlängert gedachten) Strahle einen Punkt Q beliebig an (Fig, 61), machen dann $NR = n . NQ$, ziehen von Q eine Linie parallel NE und bestimmen auf dieser einen Punkt Q_1 so, dass $NQ_1 = NR$ wird. Dann ist Q_1 ein Punkt des Strahles p_1; denn es ist:

$$NQ : NQ_1 = \sin(p_1 e) : \sin(pe) = NQ : NR = 1 : n.$$

Lassen wir jetzt alle Entfernungen NF sehr klein werden und vertauschen wir die auf p, p_1 liegenden Strecken mit ihren Projectionen auf die Axe, so haben wir, um die Richtung eines Strahles p_1 zu finden, von dem beliebigen Punkte Q der Linie p ein Perpendikel QQ' zu fällen, $FQ'_1 = n . FQ'$ zu machen, in Q_1' sodann ein Perpendikel zu

errichten und $QQ_1 \parallel NE$ zu ziehen. (Als Punkt Q' kann insbesondere P selbst gewählt werden.) Nun sind aber NF, QQ', $Q_1 Q_1'$ kleine Grössen, deren Quadrate vernachlässigt werden können; wir müssten also, um den Gang eines Strahles graphisch zu verfolgen, die Dimensionen der Figur in der zur Axe senkrechten Ebene so klein wählen, dass die Grössen von der zweiten Ordnung in ihr nicht mehr wahrgenommen werden können. Mit solchen kleinen Grössen aber kann man graphisch nicht operiren; nähme man sie aber grösser, so würden die Sätze, dass die gebrochenen Strahlen sich wieder in einem Bildpunkte vereinigen u. s. w., nicht genau zutreffen; es wäre unmöglich, eine Figur zu entwerfen, welche mit der Theorie in Uebereinstimmung ist und die eigenthümlichen geometrischen Gesetze, die hier herrschen, zur Anschauung bringt. Um diese Schwierigkeit zu überwinden, hat nun Reusch*) eine interessante Methode angewandt. Er denkt sich, während die Dimensionen nach der Axe alle dieselben bleiben, die Dimensionen senkrecht zu derselben alle in dem gleichen Maasse vergrössert, so dass, wenn NF, QQ' ... etwa von der Ordnung $\frac{1}{\omega}$ sind, alle diese Strecken ω mal genommen werden, so dass sie sich in Strecken von endlicher Grösse verwandeln, die Strecken, welche von der Ordnung $\frac{1}{\omega^2}$ sind, dagegen noch klein von der Ordnung $\frac{1}{\omega}$ bleiben. Lässt man dann ω unendlich gross sein, so bleiben die in jenem Maass ω vergrösserten Ordinaten NF, QQ' ... alle endlich, dagegen verschwinden die Ordinaten, welche von der zweiten Ordnung sind, vollständig und wir haben eine Figur vor uns, welche unserer Theorie in aller Strenge entspricht.

Fig. 61.



*) Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystemes. (Leipzig 1870.)

Freilich sind in dieser Figur die wahren Verhältnisse in affiner Weise entstellt. Der das brechende Medium in der betrachteten Ebene begrenzende Kreis ist in eine Ellipse, deren unendlich grosse Axe senkrecht auf der optischen Axe steht, d. h. in eine Gerade, welche in F normal zur optischen Axe errichtet ist, übergegangen; während die kleine Axe unverändert dem Durchmesser des Kreises gleich geblieben ist; auch hat sich der Mittelpunkt E der Ellipse nicht geändert. Die Winkelverhältnisse dagegen sind durchaus andere geworden; denn während in Wahrheit jede durch E gehende Gerade senkrecht auf dem Kreise steht, wird dies in der jetzigen Figur nicht mehr der Fall sein. Indess sind doch, worauf es hier allein ankommt, die relativen Grössenverhältnisse der Ordinaten und die absoluten Längen der Abscissen gar nicht geändert und eine gerade Linie erscheint auch nach dieser affinen Umgestaltung als solche. Der Durchschnitt zweier Geraden, also auch der Durchschnitt einer Geraden mit der Axe hat noch die nämliche Abscisse beibehalten, parallele Linien bleiben parallel.

In einer solchen Figur wird jetzt jeder die brechende Fläche in einem beliebigen Punkte N schneidende Strahl als ein solcher anzusehen sein, welcher den Bedingungen entspricht, die wir ihm auferlegt haben, nämlich in Wahrheit nur unendlich wenig von dem Scheitel der Axe abzuweichen. Es gelten demnach für die construirten Strahlen und Bilder auch die obigen Gesetze in aller Strenge.

Fig. 62.

So ist es z. B. leicht einzusehen, dass, wenn man zu einem vom Punkte P der Axe ausgehenden Strahle PN mit Hilfe der oben gegebenen Construction den gebrochenen sucht, man $(EFPP_1) = n$ findet; denn es ist:

$$NP_1 : Q_1 P_1 = EP_1 : PP_1 = FP_1 : Q_1' P_1$$

also:

$$EP_1 : FP_1 = (PE + EP_1) : (Q_1'F + FP_1) = PE : Q_1'F = PE : n\,PF.$$

Es müssen ferner auch alle von einem Punkte Π ausgehende Strahlen wieder in einem Punkte Π_1 vereinigt

werden. Der geometrische Beweis hierfür ist einfach: Sei P der Punkt der Axe, über welchem Π liegt; dann mache man $FP' = n . FP$, ziehe sodann einen beliebigen Strahl ΠN, ferner die Linie EN und parallel EN von Π aus eine Gerade, welche das im Punkte P' zur Axe errichtete Perpendikel in Π' schneidet, so ist $\Pi' N$ die Richtung des gebrochenen Strahles. Um zu zeigen, dass sich alle Strahlen dieser Art in Π_1 vereinigen, construire man zunächst den Centralstrahl ΠE, welcher ungebrochen hindurchgeht, und somit durch seinen Durchschnitt mit dem gebrochenen Strahl $\Pi' N$ das Bild Π_1 bestimmt. Nun ist:

$$\Pi_1 E : \Pi_1 \Pi = NE : \Pi' \Pi = FE : P' P$$

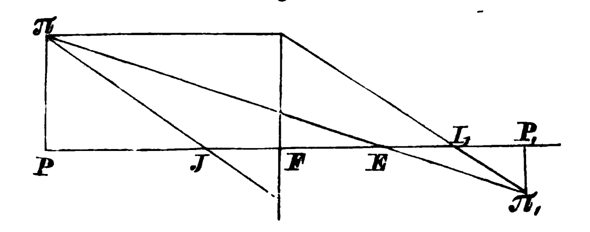
also die Lage des Punktes Π_1 auf dem Strahle ΠE bestimmt, welche Richtung der einfallende Strahl auch nehmen möge.

Dass die Bilder senkrecht auf der Axe stehender Objecte $P\Pi$ wieder senkrecht auf der Axe stehen werden, ergibt sich von selbst, da die Figur unabhängig von dem Maassstabe, nach dem man die Ordinaten senkrecht aufträgt, dieselben Abscissen der Durchschnitte liefert.

Wie oben schon ausgeführt wurde, kann man den Punkt Q' beliebig auf der Axe annehmen und $FQ_1' = n . FQ$ bestimmen. Die beiden Perpendikel in diesen beiden Punkten können dann zur Construction aller gebrochenen Strahlen verwandt werden.

Auf diese Weise sind schliesslich auch die beiden Brennpunkte $J I_1$ zu bestimmen, indem man das eine Mal zur Axe parallele Strahlen im ersten Medium zieht und diese im zweiten brechen lässt, wo sie dann alle durch I_1 gehen; das andere Mal die parallelen Strahlen des zweiten Medium nach ihrer Brechung innerhalb des ersten im

Fig. 63.



Punkte J vereinigt. Sind JI_1 durch Rechnung oder Construction gefunden, so lässt sich mit ihrer Hilfe das Bild jedes Objectes auch ohne Vermittelung des Centralstrahles construiren. (Vergl. Reusch. §. 5 u. 6.)

§. 3.

Collineare Verwandtschaft der Objecte und Bilder nach ein- und mehrmaliger Brechung.*)

Wenn wir zu jedem Punkte P und jedem Strahle p den entsprechenden Punkt P_1 und Strahl p_1 nach der von Reusch gegebenen Methode construiren, dabei nicht nur Objectpunkt P und Bildpunkt P_1 als zu einander homologe bezeichnen, sondern ebenso die Strahlen p und p_1 zu einander homologe nennen, so haben wir den Satz:

Alle Strahlen, welche den durch einen Punkt P gehenden homolog sind, vereinigen sich wieder in einem Punkte P_1, dem homologen Punkte von P. Alle Punkte, welche den auf einem Strahle p liegenden homolog sind, liegen wieder auf einem Strahle p_1, dem homologen zu p.

Zwei Räume nun, welche in dieser Beziehung zu einander stehen, dass jedem Punkte ein Punkt, jedem Strahle ein Strahl, jedem ebenen Strahlbüschel wieder ein ebener Strahlbüschel entspricht, nennt man mit Möbius collinear verwandt. Denken wir uns daher den ganzen Raum mit allen seinen Strahlen p und Punkten P und construiren zu diesem nach der Methode von Reusch die homologen Elemente p_1 und P_1, so ist der so entstandene Bildraum mit dem ersten collinear verwandt.

Es findet jedoch hier eine specielle Beziehung beider Räume auf einander und ihrer Lage statt, die wir noch weiter zu verfolgen haben.

---

*) J. Lippich: Fundamentalpunkte eines Systemes centrirter brechender Kugelflächen (Mitth. d. naturw. Ver. f. Steiermark. Band II. 1871).

Beck: Die Fundamentaleigenschaften der Linsensysteme in geometrischer Darstellung (Zeitschrift f. Math. u. Physik. 18. Jahrg. 1873).

Jeder Strahlbüschel P ist projectivisch zu seinem homologen P_1 und liegt mit ihm perspectivisch. Die homologen Strahlen schneiden sich nämlich in der Brechungsebene und der gemeinsame Strahl PP_1, welcher durch E geht, entspricht sich selber.

Rückt der Mittelpunkt des Büschels in die Ebene f, so rückt auch P_1 dahin; die beiden Büschel liegen dann vereinigt, und es sind der nach E gerichtete und der in f liegende Strahl die Doppelstrahlen.

Liegt der Mittelpunkt P auf der Axe, so entspricht ihm ein ebenfalls auf der Axe gelegener Punkt, die Axe selbst und die von P und P_1 parallel mit f gezogenen Strahlen sind einander homolog.

Jede geradlinige Punktreihe p ist projectivisch und liegt perspectivisch zu ihrer homologen p_1; denn die Verbindungslinien homologer Punkte gehen sämmtlich durch das Centrum E, der Durchschnitt von p und p_1, der auf f liegt, entspricht sich selbst.

Geht die Punktreihe durch E, so fällt sie mit der homologen zusammen und zwar sind E und der Durchschnitt mit f dann die Doppelpunkte.

Allen zur Axe senkrechten Punktreihen p entsprechen projectivische ähnliche Punktreihen p_1; es schneiden sich die Verbindungslinien homologer Punkte in einem Punkte E der Axe, dem Aehnlichkeitscentrum.

Alle diese Beziehungen lassen sich in einfacher Weise kurz dahin zusammenfassen: Ist eine Ebene f und ein Punkt E ausserhalb derselben gegeben, so bestimme man auf der Verbindungslinie EP, welche die Ebene f im Punkte F schneiden möge, zu jedem Punkte P des Raumes den homologen Punkt P_1 derart, dass $(EFPP_1) = n$. Auf diese Weise erhält man eine Beziehung zwischen der Gesammtheit der Punkte P und der Gesammtheit der zugeordneten Punkte P_1, welche als eine durch centrale Collineation vermittelte bezeichnet wird. Der Punkt E wird das Collineationscentrum, die Ebene f die Collineationsebene genannt. Bei dieser Zuordnung entsprechen der Punkt E und alle Punkte der Ebene f sich selber. In den vorliegenden Untersuchungen ist die Normale von E zu f die optische Axe.

Es mag jetzt das Licht, nachdem es durch die brechende Fläche f_1 aus einem Medium in das andere übergegangen ist und ein Bild P_1 des Objectes P erzeugt hat, fernerhin in ein neues Medium übergehen, welches ebenfalls durch eine Kugelfläche f_2, deren Mittelpunkt auf der optischen Axe liegt, begrenzt wird, d. h. in unserer Figur durch eine auf der Axe senkrechte Gerade f_2. Jedes Bild P_1 wird jetzt ein neues Bild P_2 erzeugen. Denken wir uns so eine Reihe brechender Kugelflächen, deren Centra auf einer Geraden liegen, hintereinander, so werden wir eine Reihe von Bildern $P_1, P_2 \ldots$ bis zu dem letzten P' eines Objectes P erhalten, überhaupt eine Reihe von collinearen Abbildungen des ersten Raumes P,p. Will man nun die Beziehungen des Bildes P',p', welches nach mehrmaliger Brechung erzeugt worden ist, zu dem Objecte P,p selbst untersuchen, so kann man sich dabei entweder der Vermittelung der $P_1 P_2 \ldots$ bedienen, oder dieselben einfacher aus der Natur der Verwandtschaft im Allgemeinen zu erschliessen suchen.

Denn wie schon bemerkt wird der Bildraum P',p' nothwendig dem Raume P,p collinear sein müssen. Alle Strahlen, welche den durch einen Punkt P gehenden homolog sind, vereinigen sich wieder in einem Punkte P'. Alle Punkte, welche den auf einem Strahle p liegenden homolog sind, liegen wieder auf einem Strahle p'.

Jeder Strahlenbüschel P ist projectivisch zu seinem homologen P'; doch kann jetzt im Allgemeinen die perspectivische Lage derselben nicht mehr behauptet werden. Nur, wenn der Mittelpunkt P in die Axe fällt, somit auch P' in dieselbe rückt, liegen die beiden Büschel perspectivisch, weil die Axe ein sich selbst entsprechender Strahl ist.

Die Durchschnitte der Strahlen eines von einem Punkte P der Axe ausgehenden Büschels mit ihren homologen, von einem anderen Punkte P' der Axe ausgehenden, liegen demnach sämmtlich in einer zur Axe senkrechten Geraden.

Jede geradlinige Punktreihe p_1 ist projectivisch mit ihrer homologen p'; dagegen findet jetzt die perspectivische

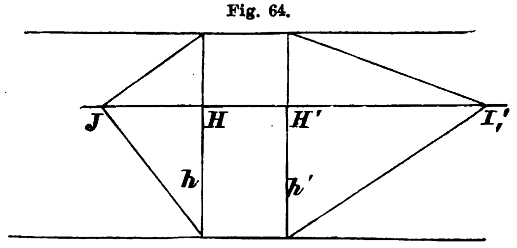
Lage im Allgemeinen nicht mehr, sondern nur in dem speciellen Falle noch statt:

Allen zur Axe senkrechten Punktreihen p entsprechen zur Axe senkrechte ähnliche Punktreihen p'; es schneiden sich alle Verbindungslinien homologer Punkte in einem Punkte der Axe, dem Aehnlichkeitscentrum, das für die verschiedenen Paare pp' auch ein verschiedenes ist.

Von besonderer Bedeutung für die geometrische Behandlung und Construction sind nun auch hier die den unendlich entfernten Punkten homologen.

Dem Strahlenbüschel, welches von dem unendlich entfernten Punkte P_∞ ausgeht, entspricht ein von I', dem Brennpunkte ausgehendes. Da beide Büschel perspectivisch liegen, so schneiden sich alle homologen Strahlen in einer Ebene h', die in einem Punkte H' auf der Axe senkrecht steht. Dieser Punkt H', der Hauptpunkt, und seine Ebene h', die Hauptebene, sind von Gauss (Gauss, dioptrische Untersuchungen, 1840. Werke T. V, p. 245) angegeben. Ebenso gibt es einen Brennpunkt J, welcher dem unendlich entfernten Punkte P_∞' entspricht, und eine Hauptebene h mit ihrem Hauptpunkte H, auf welcher sich alle von J ausgehenden Strahlen mit ihren homologen schneiden, die jetzt nach allen Brechungen zur Axe parallel laufen.

Fig. 64.

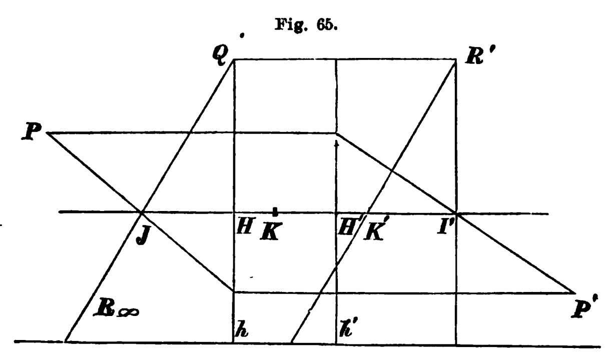


Hat man durch Construction, oder, wie nachher angegeben werden soll, durch Rechnung die Lage der beiden Brennpunkte J, I' und der Hauptebenen h, h' ermittelt, so kann man mit Leichtigkeit das Bild P' jedes Punktes P construiren.

Man ziehe den Focalstrahl PJ, verlängere diesen Strahl bis h und ziehe durch den Durchschnitt eine mit der

Axe parallele Linie. Dann ziehe man durch P eine mit der Axe parallele Gerade, einen Parallelstrahl, und verbinde deren Durchschnitt mit h' mit dem anderen Brennpunkte I'. So erhält man den Punkt P'.

Fig. 65.



Sucht man auf diese Weise das Bild eines auf der Hauptebene h gelegenen Punktes, so findet man es in h' und zwar in derselben Höhe und auf derselben Seite der Axe. Es sind also h, h' zwei homologe Strahlen; das Object h wird in h' und zwar gleichstimmig congruent abgebildet.

Die beiden ungleichstimmig liegenden congruenten Punktreihen $\bar{h}\,\bar{h}'$ hat Töpler (Poggend. Annalen, T. 142, p. 232) hervorgehoben und deren Durchschnitte mit der Axe $\bar{H}, \bar{H}'$ negative Hauptpunkte genannt; die Lage derselben ist durch die Gleichungen $J\bar{H} = I'H'$ und $I'\bar{H}' = JH$ bestimmt.

Wir lassen jetzt die Ebene p_∞ in's Unendliche rücken; es entspricht ihr eine in I' senkrechte Ebene i'. Wir suchen den Aehnlichkeitspunkt K' beider Geraden; nehmen wir einen beliebigen Punkt R' auf i', so finden wir das entsprechende Bild R auf p_∞, indem wir eine Linie von R' nach der Hauptebene h ziehen und dort in Q den Strahl nach J brechen; auf dieser Linie liegt in unendlicher Entfernung R. Ziehen wir nun parallel QJ eine Linie durch R', so ist diese die Verbindungslinie homologer Punkte $R'R$ und es gehen durch K' die Verbindungslinien aller solcher Punkte, wobei $JH = K'I'$. Ebenso gibt es einen Punkt K, so dass $H'I' = JK$, durch welchen alle Verbindungslinien

der auf der Axe senkrechten Ebene p_∞' und der in J errichteten j hindurchgehen. Die Punkte K, K' sind die, von Listing entdeckten, Knotenpunkte.

Der homologe Strahl eines beliebigen Strahles p ist nun leicht zu construiren. Schneidet p die Ebene j in Q, die Ebene p_∞ in P_∞, so muss p' durch die homologen Punkte Q' in p'_∞ und P'_∞ in i' hindurchgehen. Es gehen aber, wie wir soeben gesehen, die Verbindungslinien aller homologen Punkte von j und p'_∞ durch den Punkt K; es ist also der unendlich entfernte Punkt Q' auf QK der homologe zu Q. Die Verbindungslinien aller homologen Punkte in p_∞ und in i' gehen durch K'; also wird man den zu P_∞ entsprechenden Punkt P'_∞ auf i' finden, wenn man durch K' eine Parallele mit p zieht. Die P'_∞ und Q' verbindende Gerade ist dann der Strahl p_1, den man somit aus p findet, wenn man durch K' eine Parallele mit p, und durch deren Durchschnitt P'_∞ mit i' eine Parallele mit der Linie QK zieht. Geht der betreffende Strahl p gerade durch K, so wird der homologe Strahl p' parallel mit diesem durch K' hindurchgehen.

Der durch K gehende Richtungsstrahl behält also nach den mehrmaligen Brechungen seine Richtung bei, verschiebt sich aber in der Weise, dass er nach der Brechung durch K' geht.

Die Punkte K, K' sind, eben weil sie auf homologen Strahlen liegen, homologe Punkte, die Mittelpunkte der homologen Büschel, welche congruent sind und gleichstimmig laufen. (Die Mittelpunkte derjenigen homologen und congruenten Büschel, welche eine entgegengesetzte Drehung zeigen, hat Toepler als negative Knotenpunkte bezeichnet.)

Das ganze System homologer Punkte und Strahlen ist vollständig bestimmt, wenn man ausser J, I', welche mit den unendlich entfernten Punkten zusammen zwei Paare homologer Punkte repräsentiren, noch ein Paar homologer Punkte kennt. Als solche werden sich empfehlen entweder die Hauptpunkte, wo sich dann die Construction homologer Punkte am einfachsten gestaltet, oder die Knotenpunkte, mittels welcher man auf eine durchaus duale Weise den Gang der gebrochenen Strahlen findet. Es versteht sich

übrigens, dass man auch mittels der ersten den Gang der Lichtstrahlen, mittels letzterer den Ort der Bilder construiren kann. Will man beide Punktpaare gleichzeitig gebrauchen, so muss man immer der Beziehung $JH = K'I'$, $H'I' = JK$, $HH' = KK'$ gedenken.

Dabei ist es dann zweckmässig, die Construction des Parallel-, des Focal- und des Richtungsstrahles durch Π auszuführen, um den Punkt Π' genau zu bestimmen.

Es gibt noch andere Constructionen homologer Punkte, unter denen ich besonders auf die von Möbius a. a. O. p. 31 gegebene, die schon oben als Construction homologer Punkte projectivischer Punktreihen überhaupt erwähnt ist, verweise. Durch dieselben werden auch die Doppelpunkte der in der Axe vereinigten projectivischen Punktreihen bestimmt, welche von Listing (Pogg. Annalen T. 129) bereits in einem speciellen Falle untersucht und symptotische genannt worden sind, jedoch in der Optik keine bedeutende Rolle zu spielen scheinen.

§. 4.
Bestimmung der Cardinalpunkte nach mehrfacher Brechung.

Wir denken uns jetzt drei, im Allgemeinen verschiedene Medien hintereinander von dem Lichtstrahl durchlaufen; sie sind durch Kugelflächen von einander getrennt, die Mittelpunkte E_1, E_2 der beiden Kugeln liegen auf der Axe, welche dieselben in F_1, F_2 schneidet. Der Brechungsexponent beim Eintritt aus dem ersten Mittel in's zweite heisse n_1, der beim Eintritt aus dem zweiten in's dritte heisse n_2. Nennen wir nun P ein Object, P_1 sein Bild nach der ersten Brechung, P_2 nach der zweiten, ferner $J_1 I_1$ die beiden Brennpunkte der Fläche F_1, $J_2 I_2$ die der Fläche F_2, so haben wir nach Vorigem:

$$F_1E_1 = r_1,\quad E_1I_1 = J_1F_1 = \frac{r_1}{n_1 - 1} = \frac{q_1}{\sqrt{n_1}},\quad J_1E_1 = F_1I_1 = \frac{n_1 r_1}{n_1 - 1} = q_1\sqrt{n_1} \qquad 1)$$

$$q_1 = \sqrt{n_1}\,\frac{r_1}{n_1 - 1},\qquad J_1P \,.\, I_1P_1 = -q_1^2$$

$$P\Pi : P_1\Pi_1 = J_1P : E_1I_1 .$$

2) $F_2E_2 = r_2$, $E_2I_2 = J_2F_2 = \frac{r_2}{n_2-1} = \frac{q_2}{\sqrt{n_2}}$, $J_2E_2 = F_2I_2 = \frac{n_2 r_2}{n_2-1} = q_2\sqrt{n_2}$

$$q_2 = \sqrt{n_2}\,\frac{r_2}{n_2-1}, \quad J_2P_1 \,.\, I_2P_2 = -q_2^2$$

$$P_1\Pi_1 : P_2\Pi_2 = J_2P_1 : E_2I_2 .$$

Es ist nun aber auch möglich, das Bild P_2 unmittelbar aus P, ohne Vermittelung des P_1 abzuleiten. Da nämlich, wie schon genugsam bemerkt, die Reihe $P \overline{\wedge} P_1$ und $P_1 \overline{\wedge} P_2$, so ist auch $P \overline{\wedge} P_2$. Bezeichnen wir also die auf P, P_2 bezüglichen Brennpunkte mit $J'' I''$, so haben wir:

$$J''P \,.\, I''P_2 = -q''^2.$$

Um nun die in dieser Relation erscheinenden Elemente J'', I'', q''^2 aus den gegebenen Daten zu berechnen, so stelle man diese mit

$$J_1P \,.\, I_1P_1 = -q_1^2$$
$$J_2P_1 \,.\, I_2P_2 = -q_2^2$$

zusammen und bemerke, dass sich hieraus folgendes System homologer Punkte ergibt:

$P = J_1$	$P_1 = \infty$	$P_2 = I_2$
∞	I_1	I''
J''	J_2	∞

und somit:

3)
$$J_1J'' \,.\, I_1J_2 = -q_1^2$$
$$J_2I_1 \,.\, I_2I'' = -q_2^2$$
$$J''J_1 \,.\, I''I_2 = -q''^2 .$$

also zur Bestimmung von J'' und I'':

4) $$J''J_1 = \frac{q_1^2}{I_1J_2}, \quad I''I_2 = \frac{q_2^2}{J_2I_1}$$

und

5) $$q''^2 = \frac{q_1^2 q_2^2}{\overline{I_1J_2}^2}, \quad q'' = \frac{q_1q_2}{J_2I_1} .$$

Somit ist diese projectivische Relation vollständig bestimmt, und man bedarf, um das Bild aus dem Object abzuleiten, nicht mehr der Vermittelung durch P_1.

Die Vergrösserung ist

$$P\Pi : P_2\Pi_2 = J_1P \,.\, J_2P_1 : E_1I_1 \,.\, E_2I_2 .$$

Da aber $J''I_2$ homologe Punkte von P, P_1 sind, so hat man

$$J_1 J'' \,.\, I_1 J_2 = J_1 P \,.\, I_1 P, \text{ also auch } \frac{J_2 P_1}{I_1 J_2} = \frac{PJ''}{J_1 P}$$

und da $E_1 I_1 = \frac{q_1}{\sqrt{n_1}}$ und $E_2 I_2 = \frac{q_2}{\sqrt{n_2}}$

$$J_1 P \,.\, J_2 P_1 : E_1 I_1 \,.\, E_2 I_2 = PJ'' \,.\, I_1 J_2 : \frac{q_1 q_2}{\sqrt{n_1 n_2}} = J'' P : \frac{q''}{\sqrt{n_1 n_2}}$$

mithin:

$$6) \qquad P\Pi : P_2 \Pi_2 = J'' P : \frac{q''}{\sqrt{n_1 n_2}}.$$

Ist nun hinter dem dritten Medium noch ein viertes vorhanden, dessen Brechungsexponent gegen das dritte n_3 ist, das durch eine Kugelfläche mit dem Scheitel F_3 und dem Mittelpunkt E_3 begrenzt ist — nennen wir ferner P_3 das in diesem entstehende Bild, I_3, J_3 die Brennpunkte in Bezug auf die Brechung in F_3, q_3 die zugehörige Potenz, ferner aber $I''' J''' q'''$ die Elemente in Bezug auf die projectivische Verwandtschaft PP_3 — dann lässt sich auf die Bilder P, P_2, P_3 und deren Beziehung, die durch:

$$J'' P \,.\, I'' P_2 = -q''^2$$
$$J_3 P_2 \,.\, I_3 P_3 = -q_3^2$$
$$J''' P \,.\, I''' P_3 = -q'''^2$$

ausgedrückt wird, das vorige Raisonnement anwenden; es bestimmt sich J''', I''' und:

$$q''' = \frac{q'' q_3}{J_3 I''}.$$

Dann ist:

$$P\Pi : P_2 \Pi_2 = J'' P : \frac{q''}{\sqrt{n_1 n_2}}$$
$$P_2 \Pi_2 : P_3 \Pi_3 = J_3 P_2 : \frac{q_3}{\sqrt{n_3}}$$
$$P\Pi : P_3 \Pi_3 = J'' P \,.\, I_3 P_2 : \frac{q'' q_3}{\sqrt{n_1 n_2 n_3}}.$$

Nun ist für $P_3 = \infty$, $P = J'''$, $P_2 = J_3$ also:

$$J'' P \,.\, I'' P_2 = J'' J''' \,.\, I'' J_3$$

oder:

$$J'' P \,.\, I_3 P_2 = J''' P \,.\, J_3 I''$$

also:

$$P\Pi : P_3 \Pi_3 = J''' P : \frac{q'''}{\sqrt{n_1 n_2 n_3}}.$$

So kann man weiter fortgehen. Nennt man die Bilder, welche nach $\varkappa$maliger Brechung entstehen P', bezeichnet die Brennpunkte der Beziehung PP' mit J, I', die Potenz mit q, so kann man, das bisherige Verfahren fortsetzend, das übrigens auch durch die Anwendung der Kettenbrüche vereinfacht werden kann, diese Elemente aus den gegebenen Daten bestimmen, und hat dann:

$$JP \,.\, I'P' = -q^2$$

7) $$P\Pi : P'\Pi' = JP : \frac{q}{\sqrt{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}}.$$

Um nun die Hauptpunkte zu bestimmen, benutzen wir die Eigenschaft, dass ein in der ersten Hauptebene gelegenes Object $H\Pi$ sich abbildet in gleicher Grösse in der zweiten Hauptebene $H'\Pi'$. Es muss also sein:

8) $$JH = \frac{q}{\sqrt{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa}}, \quad H'I' = q\sqrt{n_1 n_2 \ldots n_\varkappa},$$

so dass:

$$P\Pi : P'\Pi' = JP : JH.$$

Um die Knotenpunkte zu bestimmen, benutzen wir die Definition derselben, wonach K, K' zwei homologe Punkte von der Eigenschaft sind, dass der von einem beliebigen Punkte Π ausserhalb der Axe nach K gerichtete Strahl dem von dem Bilde Π' nach dem anderen Knotenpunkte K' gerichteten Strahle parallel ist.

Danach muss:

$$P\Pi : P'\Pi' = PK : P'K' = JP : \frac{q}{\sqrt{n_1 \ldots n_\varkappa}}$$

sein, und da

$$PK : P'K' = JP : K'I'$$

ist, so hat man:

9) $$K'I' = \frac{q}{\sqrt{n_1 \ldots n_\varkappa}}, \quad JK = q\sqrt{n_1 \ldots n_\varkappa},$$

also $JH = K'I'$, $H'I' = JK$.

Die Beziehungen zwischen der Lage von Object und Bild nehmen auch nach $\varkappa$maliger Brechung dieselbe Form an, wie nach einmaliger. Nicht allein ist

$$JP \,.\, I'P' = -q^2$$

sondern, wenn A, A' zwei beliebige homologe Punkte bezeichnen:

$$\frac{JA}{PA} + \frac{I'A'}{P'A'} = 1.$$

Speciell können HH' oder KK' als solche gewählt werden; dann hat man:

$$\frac{JK}{PK} + \frac{K'I'}{K'P'} = 1$$

$$\frac{JH}{PH} + \frac{H'I'}{H'P'} = 1.$$

Gewöhnlich wendet man nach Gauss diese letztere, auf die Hauptpunkte bezügliche Gleichung an und nennt die Entfernung der Brennpunkte JH, $H'I'$ die Hauptbrennweiten.

Der Fall, in welchem das Product $n_1 n_2 \ldots n_\varkappa = 1$ ist, bedarf noch einer besonderen Erwähnung. Dann sind die beiden Hauptbrennweiten

$$JH = H'I' = q$$

einander gleich, und es fallen überdem die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen. (Aus diesem Grunde findet sich bei Gauss die Erwähnung der Knotenpunkte nicht, weil er vorzugsweise den Fall $n_1 \ldots n_\varkappa = 1$ behandelt.)

§. 5.

Theorie der dioptrischen Linse von endlicher Dicke.

Wenden wir schliesslich unsere vorstehenden Sätze auf eine Linse von endlicher Dicke an, wo also das Licht durch zwei Kugelflächen gebrochen wird, vor und hinter derselben aber dasselbe Medium sich befindet. Dann ist $n_2 = \frac{1}{n_1}$, wir setzen also n_1 schlechthin gleich n. Betrachten wir ferner die biconvexe Linse als Normalfall, setzen also F_1E_1 positiv, F_2E_2 aber negativ, also $F_1E_1 = +r_1$ $F_2E_2 = -r_2$, so ist in unseren obigen Formeln n_2 durch $\frac{1}{n}$, r_2 durch $-r_2$ zu ersetzen. Die Dicke der Linse F_1F_2 werde mit d, die Objecte mit P, die durch die Linse erzeugten

Bilder mit P' bezeichnet; mit J, I', q die Elemente der zwischen den Reihen P und P' bestehenden Beziehung. Man erhält auf diese Weise das Gleichungssystem:

$$q_1 = \sqrt{n} \cdot \frac{r_1}{n-1} \qquad q_2 = \sqrt{n}\,\frac{r_2}{n-1}$$

$$J_2 I_1 = J_2 F_2 + F_2 F_1 + F_1 I_1 = \frac{n(r_1+r_2)-(n-1)d}{n-1}$$

$$q = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{r_1 r_2}{n(r_1+r_2)-(n-1)d}$$

$$JF_1 = \frac{r_1}{n-1} \cdot \frac{nr_2-(n-1)d}{n(r_1+r_2)-(n-1)d}$$

$$F_2 I' = \frac{r_2}{n-1} \cdot \frac{nr_1-(n-1)d}{n(r_1+r_2)-(n-1)d}$$

$$JH = q \qquad H'I' = q.$$

$$F_1 H = \frac{r_1 d}{n(r_1+r_2)-(n-1)d} \quad H'F_2 = \frac{r_2 d}{n(r_1+r_2)-(n-1)d}$$

$$\frac{1}{PH} + \frac{1}{H'P'} = \frac{1}{q}.$$

Wie man sieht, sind die Abstände der Hauptpunkte von den Scheiteln der brechenden Flächen von der Ordnung der Dicke der Linse; sie fallen also, wenn diese gering ist, nahe an die Scheitel. Die beiden Hauptbrennweiten sind, da $n_1 n_2 = 1$, einander gleich, wenn sie von den entsprechenden Hauptpunkten aus gerechnet werden. Die reciproken Entfernungen des Objectes und des Bildes von den Hauptpunkten stehen in sehr einfacher Beziehung zu einander.

Die Knotenpunkte fallen hier mit den Hauptpunkten zusammen.

Es ist nicht ohne Interesse, das Bild des ersten Hauptpunktes (oder im früheren Falle des Knotenpunktes) H nach einer einmaligen Brechung zu untersuchen. Heisst dasselbe M, so haben wir:

$$J_1 H \,.\, I_1 M = -q_1^2$$

also da:

$$J_1 H = J_1 F_1 + F_1 H = \frac{r_1}{n-1} \cdot \frac{n(r_1+r_2)}{n(r_1+r_2)-(n-1)d}$$

$$MI_1 = \frac{r_1}{n-1} \cdot \frac{n(r_1+r_2)-(n-1)d}{r_1+r_2}$$

oder $F_1 M = \frac{r_1 d}{r_1 + r_2}$.

Man erkennt, dass dies der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden die Linse begrenzenden Kugelflächen ist. Denn zieht man zwei beliebige parallele Radien $E_1 R_1$, $E_2 R_2$ in entgegengesetzter Richtung, nennt M den Durchschnitt von $R_1 R_2$ mit der Centralaxe, so ist:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{E_1 M}{M E_2} F_1 M = F_1 E_1 + \frac{r_1}{r_2} (M F_1 + F_1 F_2 + F_2 E)$$

also:
$$F_1 M = \frac{d r_1}{r_1 + r_2}.$$

Diesen Punkt nannte man in der älteren Theorie den optischen Mittelpunkt der Linse. Alle Richtungsstrahlen, d. h. alle Strahlen, welchen die Eigenschaft zukommt, die Linse nach zweimaliger Brechung parallel ihrer ursprünglichen Richtung zu verlassen, zielen im ersten Mittel sämmtlich auf einen Punkt H, gehen nach einer einmaligen Brechung alle durch einen Punkt M und verlassen nach der zweiten Brechung die Linse, als ob sie von einem Punkte H' kämen.

Sechster Abschnitt.

Die Kegelschnitte als Erzeugnisse projectivischer Gebilde.

§. 1.

Die Curven zweiter Ordnung als Kegelschnitte.

Sind in einer Ebene zwei projectivische (collineare) Strahlbüschel S und S' in perspectivischer Lage gegeben, d. h. ist der gemeinsame Strahl SS' sich selber zugeordnet, so liegen, wie früher gezeigt wurde, die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden, sie erzeugen eine geradlinige Punktreihe.

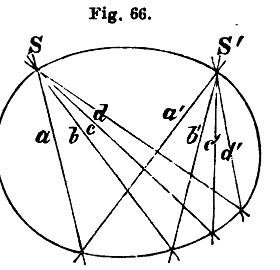
Denkt man sich aber die beiden Strahlbüschel S und S' nicht in perspectivischer, sondern in allgemeiner (schiefer) Lage, so werden auch jetzt die Durchschnitte entsprechender Strahlen a, a'; b, b' ... eine stetige Punktreihe bilden, die jedoch nicht mehr eine geradlinige, vielmehr eine gekrümmte Punktreihe, eine Curve sein wird. Jede Gerade l der Ebene schneidet diese Curve in zwei reellen oder zwei imaginären Punkten. Denn die beiden Strahlbüschel S und S' erzeugen durch ihre Schnitte mit l zwei projectivische Punktreihen auf dieser Linie, denen immer zwei reelle oder zwei imaginäre Doppelpunkte zukommen. In diesen Doppelpunkten schneidet sich ein Strahl von S mit seinem zugeordneten von S'; die beiden auf der Linie gelegenen Doppelpunkte und nur die beiden sind also zugleich auch Punkte der Curve.

Man nennt eine Curve, welche von jeder Geraden in n reellen oder imaginären, getrennten oder zusammenfallenden, endlichen oder unendlichen Punkten geschnitten wird, eine Curve $n$ter Ordnung ($n$ten Grades). Fallen insbesondere von den n auf einer Geraden gelegenen Schnittpunkten zwei zusammen, so wird diese eine Tangente der Curve genannt.

Die gerade Linie ist die Curve erster Ordnung. Eine Curve zweiter Ordnung erhält man durch die Durchschnitte entsprechender Strahlen zweier projectivischer Strahlbüschel in einer Ebene; und umgekehrt lassen sich, was wir hier nur erwähnen können, alle Curven zweiter Ordnung auf diese Weise erzeugen.

Bestimmt man zu (Fig. 66) dem Strahle SS' den zugeordneten im Büschel S', er werde mit s' bezeichnet, so schneiden sich diese beiden Geraden im Punkte S'; desgleichen fällt der Schnittpunkt von $S'S$ mit dem im Büschel S ihm zugeordneten Strahle s in den Punkt S. Die Mittelpunkte der beiden Strahlbüschel sind also Punkte der erzeugten Curve. Auf jedem von S oder S' ausgehenden Strahle liegt demnach nur noch ein weiterer Punkt, nämlich der Durchschnitt mit der entsprechenden Geraden. Auf den Linien s und s' liegen diese Punkte bez. mit S und S' vereinigt, d. h. die Linien s und s' bilden die Tangenten der Curve in diesen Punkten. Es könnte nun scheinen, als ob die Mittelpunkte der beiden Büschel, aus denen die Curve erzeugt ist, besondere, singuläre Punkte seien; jedoch lässt sich leicht nachweisen, dass jeder andere Curvenpunkt die gleichen Eigenschaften wie diese besitzt. Ist nämlich die Curve von den Punkten EF aus durch den Durchschnitt collinearer Büschel EA, EB, EC, ED und FA, FB, FC, FD erzeugt, so sind auch die Doppelverhältnisse AC, AD, AE, AF und BC, BD, BE, BF einander gleich. Denn legen wir durch CD eine Gerade, welche die Strahlen EA, EB; FA, FB bezüglich in den Punkten A', B'; A'', B'' schneidet, so wird nach der Voraussetzung

Fig. 66.



$$(A'B'CD) = (A''B''CD)$$

also auch $(CDA'A'') = (CDB'B'')$. Projicirt man diese Punkte von den Curvenpunkten A und B aus, so wird

$$(AC, AD, AE, AF) = (BC, BD, BE, BF).$$

Nimmt man also auf einer Curve zweiter Ordnung irgend zwei Punkte A und B als feste an und lässt in denselben

zwei Gerade AC, BC sich so drehen, dass sie sich immer in einem Punkte der Curve schneiden, so beschreiben diese Strahlen zwei zu einander projectivische Büschel. Demnach kann die Curve ebensowohl als durch den Durchschnitt projectivischer Büschel mit den Mittelpunkten A und B, wie solcher mit den Mittelpunkten E und F erzeugt gedacht werden; ein Satz, der auch so formulirt werden kann:

Das Doppelverhältniss von vier Strahlen, welche nach vier festen Punkten $ABCD$ einer Curve zweiter Ordnung von einem Punkte P derselben gezogen werden, hat immer denselben Werth, wo auch P liegen möge.

Unter den Curven 2. Ordnung tritt insbesondere der Kreis auf, sobald den beiden Büscheln die specielle Eigenschaft beigelegt wird, dass sie einstimmig gelegen und projectivisch gleich zu einander sind. Denn da alsdann der Winkel, welchen zwei Strahlen im Punkte S bilden, dem Winkel zwischen den homologen Strahlen in S gleich ist, so entsteht durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine Curve, in welcher die von jedem Curvenpunkte nach S und S' gezogenen Strahlen den nämlichen Winkel bilden. Dass diese Curve ein durch die Punkte S, S' gehender Kreis sein muss, wird unmittelbar einleuchtend, wenn man durch diese beiden und irgend einen durch die Construction gewonnenen dritten Punkt einen Kreis hindurchlegt; alsdann muss jeder weitere Punkt, welcher aus der Beziehung der beiden Strahlbüschel erhalten wird, auf diesem Kreise gelegen sein.

Verbindet man einen Punkt O ausserhalb der Ebene ε des Strahlbüschels S mit den Strahlen desselben durch Ebenen, projicirt man also den Büschel S von O aus, so erhält man einen Ebenenbüschel, dessen Axe OS von allen Ebenen geschnitten wird. Eine beliebige nicht durch die Axe gehende Ebene ε_1 schneidet diesen Ebenenbüschel in einem Strahlenbüschel S_1, welcher mit S projectivisch ist und perspectivisch liegt, da sich alle homologen Strahlen in einer Geraden schneiden, nämlich dem Durchschnitte von ε und ε_1. Projicirt man jetzt zwei projectivische Büschel S, S', welche in einer Ebene ε liegen, von einem ausserhalb

derselben befindlichen Punkte O, so schneiden sich die homologen Ebenen in Geraden, welche sämmtlich durch O gehen und einen sogenannten Kegel zweiter Ordnung bilden, der zugleich der Schein der Curve zweiter Ordnung ist, in welcher sich die homologen Strahlen von S und S' begegnen. Die ebenen Schnitte dieses Kegels (Centralprojectionen der Curve SS') sind sämmtlich wieder Curven 2. Ordnung. Denn schneidet die Ebene ε_1 die beiden Ebenenbüschel in den Strahlbüscheln $S_1 S_1'$, so ist $S_1 \overline{\wedge} S$, $S_1' \overline{\wedge} S'$ nnd da $S \overline{\wedge} S'$, auch $S_1 \overline{\wedge} S_1'$.

Diese Eigenschaft einer Curve 2. Ordnung, dass sie immer als Schein eines Kegels 2. Ordnung aufgefasst werden kann, giebt noch zu einem specielleren Satze Anlass, welcher diese Curven als die Kegelschnitte im Sinne der Alten erscheinen lassen wird:

Eine jede Curve zweiter Ordnung kann als Schnitt eines (im Allgemeinen schiefen) Kreiskegels angesehen werden.

Um dieses nachzuweisen, seien S, S' die beiden Mittelpunkte zweier collinearer Büschel in der Ebene ε, Z ein variabeler Punkt der Curve, und $SZ, S'Z$ mögen eine die Curve nicht (in reellen Punkten) schneidende Gerade l in X, X' treffen.*) Dann bilden die Punktreihen X, X' zwei collineare Systeme mit imaginären Doppelpunkten. In Folge dessen giebt es in der Ebene ε, in gleicher Entfernung von dem Mittelpunkte M der beiden Punktreihen, zwei Punkte, von denen aus die Segmente XX' alle unter gleichen Winkeln erscheinen, und alle Punkte, welche sich in derselben Entfernung von M in einem Kreise befinden,

*) Von der Zulässigkeit der Annahme solch einer Geraden l überzeugt man sich sofort, indem man in irgend einem Curvenpunkte z. B. in S, die Tangente der Curve construirt. Bewegt man alsdann diese Gerade parallel zu sich selber nach der einen oder nach der anderen Seite hin, so lässt sich, am einfachsten durch Bestimmung der Fluchtpunkte J, I_1, nachweisen, dass bei der Bewegung nach der einen Seite die Bedingung der Realität für die Doppelpunkte erfüllt bleibt; im Punkte S selber fallen nämlich die beiden Doppelpunkte zusammen. Dagegen wird nun bei einer Verschiebung der Geraden in der entgegengesetzten Richtung die Bedingung der Realität zunächst nicht mehr erfüllt.

dessen Ebene auf l senkrecht steht, haben die nämliche Eigenschaft. Sei dann O ein beliebiger Punkt dieses Kreises, so lege man parallel zu der durch O und l gehenden Ebene irgend eine andere ε_1 und projicire von O als Augenpunkt die Curve 2. Ordnung auf diese Ebene. Dann wird die Projection eines Strahles SX in ε_1 eine Linie, welche parallel zu OX ist, und ebenso wird die Projection von $S'X'$ parallel OX'. Nennt man die Projectionen der Punkte S, S', Z, bez. $S_1 S_1' Z_1$, so ist also der Winkel $S_1 Z S_1'$ dem constanten Winkel gleich, unter welchem das variabele Segment XX' von O aus erscheint, d. h. die Curve, welche in der Ebene ε_1 die Projection der Curve 2. Ordnung bildet, wird ein Kreis, oder die Curve 2. Ordnung erscheint als ebener Schnitt eines Kreiskegels O $(S_1 S_1' Z_1)$.

Bemerkt man weiter, dass l eine ganz beliebige Gerade ist, welche in der Ebene der Curve gelegen, dieselbe nicht schneidet, so hat man den Satz:

Eine Curve 2. Ordnung und eine sie nicht schneidende Gerade in ihrer Ebene können stets so projicirt werden, dass die Gerade ins Unendliche fällt und die Curve ein Kreis wird; die Lage des Projectionspunktes bleibt dabei noch auf einem Kreise willkührlich.*)

Die Kegelschnitte, wie wir hiernach die Curven zweiten Grades, nach altem Sprachgebrauche nennen können, sind von den Alten eben als solche untersucht worden. Für sie bildete die Eigenschaft der Kegelschnitte, Projectionen eines Kreises zu sein, den Ausgang der Untersuchung; doch haben sie merkwürdiger Weise aus dieser Eigenschaft zunächst andere, allerdings auch wesentliche abgeleitet und diese dann für die weitere Behandlung zu Grunde gelegt.

Jene wesentliche Eigenschaft entspricht derjenigen, welche heute in der analytischen Geometrie zur Grundlage für die Discussion der Kegelschnitte dient; ihre Anwendung aber musste, so elegant und durchsichtig sie auch heute ist, in den Händen

*) Dieser wichtige Satz ist von Poncelet zuerst ausgesprochen, aber etwas anders bewiesen worden. Obige Construction, welche mit der Poncelet'schen zusammenfällt, ist von Chasles (Traité de la géom. supér.) gegeben worden.

der antiken Geometer eine sehr beschwerlich sein, da sie ganz der Hülfe des Calculs entbehren und dessen Transformationen durch geometrische Constructionen ersetzen mussten, welche vor der Rechnung weder die Anschaulichkeit noch die Genauigkeit oder Einfachheit voraus haben. So kam es denn, dass, obgleich manche wichtige Eigenschaften der Kegelschnitte entdeckt wurden, der Fortschritt auf diesem Wege ein äusserst langsamer war und die Theorie der Kegelschnitte zu den schwierigsten der ganzen Wissenschaft gerechnet wurde.

Erst in der Mitte des 17. Jahrhunderts begannen de la Hire, Desargues und Pascal von der Methode der Projection einen ausgedehnteren Gebrauch zu machen — ein Fortschritt, der auf die Entwickelung der ganzen Geometrie von den bedeutendsten Folgen hätte sein müssen, hätte nicht die bald danach auftretende Analysis das Interesse der Mathematiker bis ans Ende des 18. Jahrhunderts ausschliesslich in Anspruch genommen. Erst von Poncelet aber datirt die Erkenntniss von der Leichtigkeit, mit welcher das Princip der Projection geometrische Sätze zu liefern im Stande ist. Er zuerst sprach den Gedanken aus, dass jeder Eigenschaft am Kreise eine am Kegelschnitte entsprechen müsse, so zwar, dass die Herleitung der letzteren keines Beweises bedürfe, wenn sie am Kreise nachgewiesen ist; dass überhaupt an speciellen Fällen durch Anwendung elementar geometrischer Sätze Eigenschaften erkannt werden können, die sich durch Projection ohne weiteres auf allgemeinere ausdehnen lassen.

Durch die Theorie der collinearen Büschel und Punktreihen ist dann freilich die Methode der Projection in den Schatten gestellt worden, weil sich jene nicht allein fruchtbarer, sondern auch zu systematischer Untersuchung zweckmässiger erwies. Trotzdem aber bleibt die Methode der Projectionen als Ergänzung der neuen, wesentlich von Steiner begründeten Theorie von bedeutendem Nutzen; für gewisse Reihen von Sätzen ist sie entschieden die naturgemässe Methode. Wir werden daher, sobald es dienlich ist, dieselbe auch im Folgenden zur Anwendung bringen.

§. 2.

Perspectivische Abbildung des Kegels mit seinen ebenen Schnitten.

Die Untersuchung der verschiedenen Arten von Kegelschnitten wird durch Zeichnungen, welche dieselben am Kegel selbst zur Anschauung bringen, wesentlich unterstützt.

Wir denken uns den Kegel mit allen an ihm vorkom-

menden Curve auf die Zeichnungsebene (die des Papieres) entweder von einem gegebenen Punkte aus, oder was wenigstens in den meisten Fällen vorzuziehen ist, durch Parallelprojection übertragen; denn wir erreichen bei dieser Projection den Vortheil, dass parallele Linien der Figur auch in der Projection parallel bleiben, und dass, wie die Anschauung unmittelbar lehrt, die Art des Kegelschnittes stets unverändert bleibt. Im Uebrigen machen wir über die Lage des zu zeichnenden Kegels gegen die Zeichnungsebene und die Projectionsrichtung keinerlei bestimmte Voraussetzung.

Der Kegel ist nun völlig bestimmt, wenn seine Spitze C und der Grundkreis K_1 in der Ebene ε_1, die Projection des Kegels, wenn die der Spitze und des Grundkreises gegeben ist; die Parallelprojection des letzteren wird immer eine geschlossene Curve, eine Ellipse, sein. Eine Schnittebene ε des Kegels, deren Schnittfigur K wir construiren wollen, wird bestimmt, wenn uns ihr Durchschnitt s mit der Ebene ε_1 und der Durchschnittspunkt P mit einer Seite CP_1 des Kegels, resp. wenn uns die Projectionen dieser Stücke gegeben sind, die wir, wie im Folgenden überall geschieht, mit denselben Buchstaben bezeichnen.

Es ist nun leicht, den Kegelschnitt K in der Ebene ε punktweise zu construiren. Um den auf einem Strahle CQ_1 (wo Q_1 ein Punkt des Kreises K_1) liegenden Punkt Q zu construiren, ziehen wir P_1Q_1 bis zu seinem Durchschnitte R mit s, verbinden R mit P und erhalten so den Durchschnitt Q mit dem Strahle CQ_1 als Punkt des Kegelschnittes. Gibt man dem Punkte Q_1 alle aufeinanderfolgende Lagen, so erhält man durch lineale Construction den gewünschten Kegelschnitt K in seiner Centralprojection auf die Zeichnungsebene.

Von grosser Bedeutung für die Lehre von den Kegelschnitten ist die Ebene ε', welche parallel mit ε durch den Mittelpunkt C des Kegels gelegt wird. Um deren Durchschnitt s' mit der Basis ε_1 des Kegels zu finden, bemerken wir zunächst, dass s' parallel s; dass ferner die Ebene CP_1Q_1 in parallelen Linien von ε und ε' geschnitten werden wird, von ε in PQ, von ε' in einer dazu parallelen Linie, welche aber, da ε' und CP_1Q_1 durch C gehen, nothwendig

durch C gehen muss. Ziehen wir also in unserer Zeichnung eine Linie durch C parallel PQ, so schneidet diese die $P_1 Q_1$ in einem Punkte R', der zu der Durchschnittslinie s' von ε' mit der Ebene der Basis gehört; wenn also endlich durch R' eine Parallele zu s gezogen wird, so erhalten wir die gesuchte Linie s'. Auf derselben liegen, wie sich von selbst versteht, auch alle anderen Punkte R', welche man erhielte, wenn man von zwei anderen Punkten $P_1 Q_1$ unserer Basis ausgegangen wäre.

Und hieraus ergibt sich nun eine andere Construction der Kegelschnitte, wenn von vornherein die Ebene ε nicht durch ihren Durchschnitt s mit der Basis und einen Punkt P, sondern was für viele Zwecke vortheilhafter ist, wenn ε durch s und ausserdem durch die Linie s' bestimmt ist, in welchem eine zu ε parallel durch den Mittelpunkt C des Kegels gelegte Ebene ε' die Basis schneidet.

Man nehme dann einen beliebigen Punkt R' auf s', ziehe durch ihn beliebig eine Linie, welche den Basiskreis in $P_1 Q_1$ schneiden mag, die Gerade s aber in R schneidet. Zieht man dann durch R eine Parallele mit CR', so schneidet diese die beiden Strahlen CP_1, CQ_1 in den verlangten Punkten P, Q des Kegelschnittes.

Man sieht, wie man so ausgehend von einem einzigen Punkte R' der Linie s' den Kegelschnitt lineal construiren könnte.

Eine Berührungsebene des Kegels schneidet die Ebenen von K_1 und K in den Tangenten an Kreis und Kegelschnitt, die sich in einem Punkte von s schneiden. Denn es sind diese Tangenten die Verbindungslinien entsprechender Punkte $P_1 Q_1$, PQ im Grenzfalle. Den Tangenten an K_1, die parallel mit s sind, entsprechen daher auch zu s parallele Tangenten in K. Sucht man also die diametral gegenüberliegenden Punkte von K_1, deren Tangenten parallel der Linie s, so werden in den entsprechenden Punkten von K die Tangenten ebenfalls parallel s sein.

---

§. 3.

Die verschiedenen Arten der Kegelschnitte.

Legen wir durch den Mittelpunkt C eines schiefen Kreiskegels eine Ebene ε', welche die Ebene des Grundkreises K_1 in s' schneidet, so liegt

1) Entweder kein Strahl des Kegels in derselben, sondern alle werden von ihr im Punkte C nur geschnitten. Diese Ebene ε' trifft den Grundkreis des Kegels nicht, s' liegt ausserhalb K_1. Die beiden Hälften des Kegelmantels befinden sich zu verschiedenen Seiten der Ebene.

2) Oder es liegt ein Strahl der Kegelfläche in der Ebene ε', während alle anderen Strahlen von ihr in C geschnitten werden. Eine solche Ebene berührt den Grundkreis, d. h. s' ist eine Tangente von K_1 in dem Punkte, den wir T_1' nennen wollen; in Bezug auf ε' liegen die beiden Hälften des Kegelmantels zu verschiedenen Seiten.

3) Oder es liegen zwei Strahlen des Kegels in der Ebene ε', während alle anderen Strahlen von ihr in C geschnitten werden. Die Linie s' schneidet K_1 in zwei reellen Punkten, die wir A_1', B_1' nennen wollen; die Ebene zerschneidet jede Hälfte des Kegelmantels in zwei Theile.

Eine beliebige andere Ebene ε wird nun immer einer solchen Ebene ε' parallel sein, sie wird also

1) Entweder alle Strahlen des Kegels innerhalb der einen Hälfte des Kegelmantels in endlicher Entfernung von C schneiden —

2) Oder alle Strahlen des Kegels innerhalb einer Hälfte des Kegelmantels in endlicher Entfernung schneiden mit Ausnahme des einen Strahles CT_1', der in der parallelen Ebene ε' liegt; diesen Strahl trifft sie im Unendlichen.

3) Oder die Ebene ε trifft zwei Strahlen CA_1', CB_1', in denen nämlich die parallele Ebene ε' den Kegel schneidet, nicht im Endlichen; alle anderen Strahlen dagegen schneidet sie im Endlichen, jedoch den einen Theil der Strahlen innerhalb der einen, den anderen Theil innerhalb der anderen Hälfte des Kegelmantels.

Daraus ergeben sich also folgende Arten von Kegelschnitten:

1) Die Curve ist eine in sich geschlossene, im Endlichen verlaufende Linie, eine Ellipse. Die Berührungsebenen des Kegels bestimmen durch ihren Schnitt mit ε die Tangenten der Curve und alle diese Tangenten liegen in endlicher Entfernung.

Grenzfall der Ellipse: Ein Punkt, wenn ε mit ε' zusammenfällt.

2) Die Curve besteht aus einem in's Unendliche verlaufenden Zuge, der einen unendlich entfernten Punkt auf $C\,T_1'$, in diesem aber eine Tangente parallel s' in unendlicher Ferne hat. Diese Curve heisst eine Parabel und geht aus der Ellipse hervor, indem ein Punkt derselben sich unendlich entfernt.

Grenzfall der Parabel: Eine Gerade, die aber als aus zwei zusammengefallenen entstanden anzusehen ist, insofern dann die Berührungsebene ε_1' des Kegels zwei zusammengefallene Strahlen desselben enthält.

3) Die Curve besteht aus zwei in's Unendliche auslaufenden Zweigen; sie hat zwei unendlich entfernte Punkte, welche den Strahlen $C\,A_1'$, $C\,B_1'$ angehören, sie ist eine Hyperbel. Jede Berührungsebene des Kegels schneidet ε in der Tangente, welche zu dem Punkte der Curve gehört, der dem betreffenden Strahle entspricht. Die Berührungsebenen der Strahlen $C A_1'$, $C B_1'$ bestimmen durch ihren Durchschnitt mit ε die beiden Tangenten an den unendlich fernen Punkten, die Asymptoten. Man construirt dieselben, indem man in A_1', B_1' Tangenten an den Grundkreis zieht, deren Durchschnitt mit s markirt und durch diese Punkte Parallele zu $C A_1'$, $C B_1'$ hindurchlegt. Alle Tangenten befinden sich in endlicher Entfernung. Grenzfall der Hyperbel: Zwei sich schneidende Gerade.

Nachdem so die Kriterien festgestellt sind, nach welchen man die verschiedenen Arten der Kegelschnitte unterscheiden kann, ist es auch leicht anzugeben, welche Art derselben aus zwei gegebenen projectivischen Strahlbüscheln entsteht. Denken wir uns die beiden Strahlbüschel S, S' zunächst vereinigt gelegen, indem wir etwa S' parallel nach S verschieben, so werden dieselben entweder zwei oder einen (d. h. zwei zusammenfallende) oder keinen reellen Doppel-

strahl besitzen. Bringt man nun S' wieder in seine ursprüngliche Lage, so giebt es demgemäss zwei, einen oder keinen Strahl, dessen homologer ihm parallel ist, d. h. einen Kegelschnitt mit zwei, einem oder keinem unendlich entfernten Punkte: Hyperbel, Parabel oder Ellipse.

Sind die beiden erzeugenden projectivischen Büschel entgegengesetzten Sinnes, so werden sie nach ihrer Parallelverschiebung jedenfalls reelle Doppelstrahlen haben, es entsteht also in diesem Falle immer eine Hyperbel, deren Asymptoten der Richtung jener Doppelstrahlen parallel sind. Eine Hyperbel, deren Asymptoten auf einander senkrecht stehen, heisst gleichseitig. Es gibt aber in zwei projectivischen Büscheln im Allgemeinen nur ein Paar homologer rechter Winkel und es wird daher eine gleichseitige Hyperbel erzeugt, wenn die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel einander parallel sind. Insbesondere aber ist dies immer der Fall, wenn die beiden Büschel einander entgegengesetzt projectivisch gleich sind, weil dann bei jeder Lage die Doppelstrahlen auf einander senkrecht stehen; sie sind, wie wir wissen, die Halbirungslinien der von je zwei einander entsprechenden Strahlen gebildeten Winkel.

Ein anderer besonderer Fall ist der, wenn die beiden Büschel in perspectivische Lage kommen; dann liegen sowohl alle Punkte der Projectionsaxe, wie alle Punkte des gemeinsamen Strahles SS' in homologen Strahlen und es degenerirt die Hyperbel in diese beiden geraden Linien.

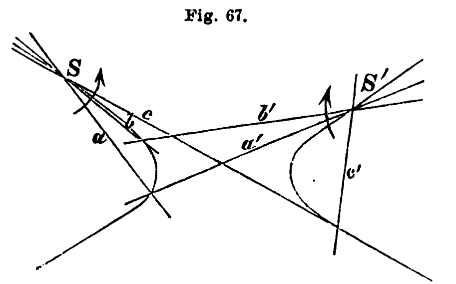
Wir können noch weiter behaupten, dass, falls die Büschel S, S' entgegengesetzten Sinnes sind, die Punkte S, S' verschiedenen Zweigen der Hyperbel angehören werden.

Liegen nämlich die Punkte S, S' auf verschiedenen Zweigen, so wird jede Linie, welche SS' ausserhalb der Strecke SS' trifft, die Hyperbel in zwei reellen Punkten schneiden müssen. Es wird aber unter den, die Strecke SS' schneidenden Geraden nothwendig solche geben, welche die Hyperbel nicht schneiden. Liegen dagegen S, S' auf

demselben Zweige, so müssen alle die Strecke SS' schneidenden Geraden auch die Hyperbel schneiden, dagegen werden unter den SS' ausserhalb schneidenden Geraden auch solche Linien sein, welche die Hyperbel nicht treffen, sondern ganz ausserhalb derselben verlaufen.

Sind nun die Büschel S, S' entgegengesetzt, so erzeugen sie auf jeder, die Strecke SS' nicht schneidenden Geraden zwei Punktreihen entgegengesetzten Sinnes; diesen kommen aber stets reelle Doppelpunkte zu, d. h. reelle Schnitte mit der Curve. Solche Gerade dagegen, welche die Linie innerhalb der Strecke SS' treffen, werden Punktreihen von gleicher Richtung enthalten, denen nicht nothwendig reelle Doppelpunkte entsprechen müssen. Wir haben es also mit dem ersten der obigen zwei Fälle zu thun, S und S' liegen auf verschiedenen Zweigen.

Fig. 67.



Wenn aber die projectivischen Büschel einstimmig liegen, so können sie alle drei Arten von Kegelschnitten erzeugen; S, S' gehören hier immer einem und demselben Zweige an.

Um zu entscheiden, welche der drei Arten in einem gegebenen Falle alsdann vorliegt, bedarf es einer weiteren Orientirung:

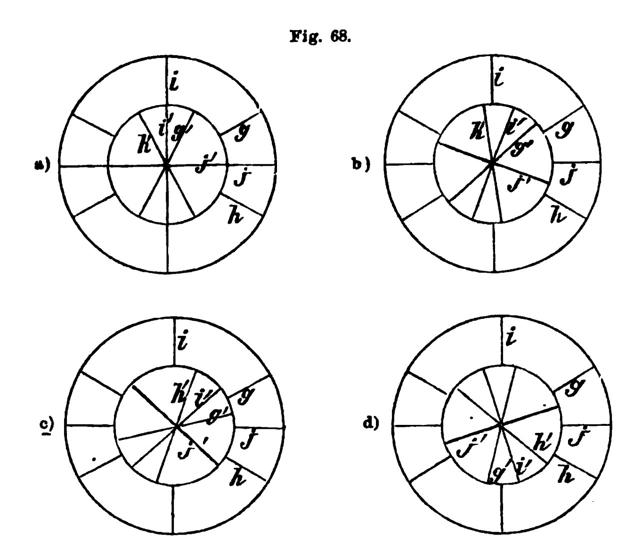
Es seien ij, $i'j'$ die entsprechenden rechten Winkel der beiden durch Parallelverschiebung vereinigten Büschel, und $\tan jp \,.\, \tan i'p' = -q^2$ und $q = \tan u$; dann bestimme man $gh, g'h'$ so, dass die Winkel:

$$u = jh = h'i' = gj = i'g',$$

und es werden die Doppelstrahlen reell sein, wenn gh und $g'h'$ nicht in einander greifen — imaginär, wenn sie in einander greifen. Stossen sie an einander an, so sind die Doppelstrahlen in einem Strahle vereinigt.

Geht man aus von der Lage, in der sich die Büschel decken (Fig. 68a), und dreht den Büschel p' etwas nach rechts (Fig. 68b), so liegen reelle Doppelstrahlen zwischen

Fig. 68.



$i'g'$ und gj (denn diese Winkel sind von dem homologen ig und $g'j'$ eingeschlossen). Hyperbel. — Fällt dann g' mit g zusammen, so sind in gg' die Doppelstrahlen vereinigt: Parabel. Bei weiterer Drehung werden die Doppelstrahlen imaginär, weil gh, $g'h'$ in einander eingreifen (Fig. 68c): Ellipse. Dann entsteht, wenn hh' zusammenfällt, eine Parabel, und endlich bei weiterer Drehung (Fig. 68d) wieder eine Hyperbel.

Als Grenzfälle haben wir, wenn die Mittelpunkte der beiden Büschel von vornherein zusammenfallen, den Punkt, die Gerade, zwei Gerade, wie sie schon bei dem Kegel erhalten wurden.

Noch ein specieller Grenzfall ist hierbei zu beachten: Wenn nämlich die beiden vereinigten Mittelpunkte der Büschel in's Unendliche fallen, also ihre Strahlen sämmtlich parallel sind, so wird es (wie man leicht sieht, wenn man sie durch eine beliebige Gerade schneidet) zwei imaginäre oder reelle parallele Doppelstrahlen geben, in die dann der Kegelschnitt übergeht. Es kann dann ein solches Paar paralleler Strahlen als Grenzfall für alle drei Kegelschnitte angesehen werden.

Man erhält diesen Grenzfall anschaulich an einem Kegel zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt in's Unendliche gefallen ist, also an einem Cylinder 2. Ordnung, wenn man denselben durch eine Ebene parallel seiner Generatrix schneidet.

Alle diese Grenzfälle sind nicht im eigentlichen Sinne als Projectionen eines Kreises anzusehen; denn wenn sie auch in einem gewissen Sinne aus dem Strahlenbüschel, welcher einen Kreis projicirt, herausgeschnitten werden können, so ist doch die Gegenseitigkeit nicht vorhanden und niemals kann man eine oder zwei Gerade oder auch einen Punkt so projiciren, dass ein Kreis entstände. Auch erfüllen diese degenerirten Curven 2. Ordnung nicht die Bedingung, unter welcher unser Beweis, dass sie in einen Kreis projicirt werden können, allein zulässig war, dass nämlich eine Gerade l, welche die Curve nicht schneidet, angegeben werden könne. Denn das Raisonnement, aus dem wir schlossen, es gäbe solche Linien l, beruhte auf der Natur der Tangenten an einer Curve im Allgemeinen. Bei diesen zu geraden Linien oder einem Punkte degenerirten Curven verliert der Begriff der Tangenten seinen eigentlichen Sinn.

§. 4.

Lineale Construction der Kegelschnitte.

Aus der Definition der Kegelschnitte mittels projectivischer Büschel geht hervor, dass das Lineal genügt, um einen solchen zu construiren. Man braucht eben nur zwei beliebige Büschel in schiefer Lage zu zeichnen, und die Schnittpunkte homologer Strahlen zu bestimmen.

Um für zwei projectivische Büschel die entsprechenden Elemente zu erhalten, benutzt man zwei projectivische Punktreihen, welche sich zu je einem der Strahlbüschel und zu einander in perspectivischer Lage befinden. Seien S, S' die Mittelpunkte der beiden Strahlbüschel, aa', bb', cc' drei Paare zu einander homologer Strahlen, so lege man durch den Durchschnitt zweier entsprechender Strahlen, etwa a und a', zwei beliebige Linien s, s'. Das Strahlbüschel S und

ebenso S' bestimmt auf s, bez. s' eine zu ihm perspectivische Punktreihe, so zwar, dass beide Punktreihen auch zu einander perspectivisch liegen, also die Verbindungslinien entsprechender Punkte in einem Punkte G zusammenlaufen; denn der beiden Geraden gemeinsame Punkt ist zufolge der Construction sich selber zugeordnet. Lässt man nun einen Strahl g sich in G drehen, welcher die Linien s und s' in den Punkten U und U' trifft, so sind die Strahlen SU und $S'U'$ homologe; ihr Durchschnitt X liefert dann einen Punkt des Kegelschnittes nach dem anderen. Der Kegelschnitt geht durch die Punkte S, S' ferner durch den Durchschnitt der Linien SG und s', (R'), $S'G$ und s, (R), s und s', (A) hindurch. Die vorstehende Construction löst also insbesondere zugleich die Aufgabe, den zweiten Schnittpunkt R (oder R') auf einer Geraden s (oder s') zu bestimmen, wenn der erste A bekannt ist.

Die projectivische Beziehung zwischen zwei Strahlbüscheln ist vollständig festgesetzt, sobald zu dreien Strahlen abc in dem einen Büschel die homologen $a'b'c'$ in dem anderen gegeben sind; denn einem vierten Strahle d entspricht alsdann nur der eine Strahl d, welcher der Bedingung $(a'b'c'd') = (abcd)$ genügt. Mithin muss ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt sein, sobald fünf Punkte, durch welche er hindurchgehen soll, beliebig in der Ebene gegeben sind. Seien A, B, C, D, E diese fünf Punkte, so wähle man zwei unter ihnen, z. B. AB als Mittelpunkte von zwei Strahlbüscheln. Den Strahlen AC, AD, AE des einen Büschels entsprechen alsdann die Strahlen BC, BD, BE des anderen, und die eben gegebene Construction lässt zu jedem weiteren von A ausgehenden Strahle den zugehörigen in B eindeutig finden. Dieselbe kann noch dadurch vereinfacht werden, dass man als Linie s etwa die Verbindung CD, als s' die Linie CE wählt. Der Punkt G wird alsdann durch den Schnitt von SE mit $S'D$ erhalten.

Aus unserer Construction können wir noch gelegentlich den Satz ableiten:

Bewegt sich ein Dreieck $U'XU$ so, dass sich seine drei Seiten um drei feste Punkte S', S, G drehen, während zwei

seiner Ecken U und U' auf festen Geraden $s\,s'$ sich bewegen, so beschreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt.*)

Liegt der Durchschnitt der Linien s, s' auf der Geraden SS', so befinden sich die beiden Büschel in perspectivischer Lage; ihr Durchschnitt ist nicht mehr ein Kegelschnitt, sondern eine Gerade. Ist also das Dreieck $SS'G$ einem anderen ARR' umschrieben und bewegt sich ein dem $SS'G$ umschriebenes Dreieck UXU' so, dass zwei Ecken U und U' desselben auf zwei Seiten AR und AR' des eingeschriebenen Dreiecks gleiten, so gleitet auch die dritte Ecke X auf der dritten Seite RR' des Dreiecks; oder mit anderen Worten: Ist ein Dreieck einem anderen umschrieben, so giebt es unzählig viele Dreiecke, welche dem ersten umschrieben, dem letzteren aber eingeschrieben sind. In dieser Form haben wir den Satz schon früher kennen gelernt (pag. 94).

§. 5.

Pascal's Sechseck (Hexagramma mysticum).

Wenn ein Kegelschnitt durch 5 Punkte eindeutig bestimmt wird, so muss zwischen der Lage von 6 einem Kegelschnitt angehörigen Punkten eine Relation stattfinden, welche eben in obiger Construction enthalten ist. Wir können diese indess noch auf eine andere interessante Weise fassen. Seien A, B, C, D, E wiederum die ursprünglich gegebenen 5 Punkte, F ein sechster aus ihnen durch die angegebene Construction gefundener, so bilden diese zusammen ein S e c h s e c k, welches wir zunächst in der Reihenfolge AF $BDCE$ betrachten wollen; die Durchschnitte der Strahlen

$$AF \cdot DC = U \quad FB \cdot CE = U' \quad BD \cdot EA = G$$

liegen dann, wie wir gesehen haben, auf einer geraden Linie g und wir sind somit zu dem P a s c a l ' s c h e n S a t z e gelangt: D i e g e g e n ü b e r l i e g e n d e n S e i t e n e i n e s e i n e m K e g e l s c h n i t t e e i n g e s c h r i e b e n e n S e c h s e c k e s s c h n e i d e n s i c h i n 3 P u n k t e n, w e l c h e i n g e r a d e r L i n i e l i e g e n.

*) Dieser Satz ist bereits von Maclaurin und Braikenridge in noch allgemeinerer Fassung ausgesprochen worden.

Mittels dieses Satzes kann man die Construction eines sechsten Punktes F auf einem Kegelschnitte, für welchen 5 Punkte $ABCDE$ gegeben sind, auch so formuliren: Man bestimme den Durchschnitt zweier Verbindungslinien etwa:

$AB \cdot DE = L$, lege durch L eine beliebige Linie g, ziehe BC, welche g im Punkte I, CD, welche g in K schneidet, so ist der Durchschnitt der Geraden AK und EI, $AK \cdot EI = F$, ein sechster auf dem Kegelschnitt gelegener Punkt. Indem man die Lage von g variirt, erhält man so verschiedene Punkte F des Kegelschnittes in beliebiger Anzahl. Man bemerkt indess, dass diese Construction wesentlich nichts weiter als eine andere Auffassung der früheren ist. Vertauscht man nur die Namen der Punkte

$$A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F \quad L \quad I \quad K$$

mit

$$S \quad R' \quad A \quad R \quad S' \quad X \quad G \quad U' \quad U$$

so hat man auch der Bezeichnung nach genau die vorige Construction.

Für den Pascal'schen Satz lässt sich noch ein einfacher Beweis durch Projection geben, der allerdings zunächst nur dann anwendbar ist, wenn die Linie g den Kegelschnitt nicht in reellen Punkten trifft. Sei $ABCDEF$ das eingeschriebene Sechseck, so projicire man den Kegelschnitt in einen Kreis und gleichzeitig die Punkte

$$AB \cdot DE = L \qquad BC \cdot EF = I$$

ins Unendliche. Dann sind die Seiten des Sechseckes $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, daher $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ und somit auch $\widehat{AFC} = 180^0 - \widehat{ABC}$, $\widehat{DCF} = 180 - \widehat{DEF}$ einander gleich, d. h. $CD \parallel FA$. Der Durchschnitt $CD \cdot FA = K$ liegt also gleichfalls auf der unendlich fernen Geraden. Um vermittels dieses Beweises die Behauptung als allgemein giltige für alle Lagen der Linie $g = IL$ zu erkennen, muss man sich dann des von Poncelet eingeführten, algebraisch evidenten Principes der Continuität bedienen: Ein Satz, der für alle stetig in einander übergehenden Lagen einer Kategorie bewiesen ist, gilt allgemein auch für Lagen anderer Kategorien, sobald nur die im Satze selbst auftretenden Elemente

reell bleiben; mögen auch die zum Beweise angewandten Hilfsmittel jetzt nicht mehr anwendbar sein. —

Der Satz, welcher durch Umkehr des Pascal'schen gewonnen wird, versteht sich nach Obigem von selbst:

Einem Sechsecke, bei welchem die Durchschnitte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden liegen, kann stets ein Kegelschnitt umschrieben werden.

Man nennt ein solches Sechseck kurz ein Pascal'sches. Den Specialfall des Pascal'schen Satzes, wenn nämlich der Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt, haben wir schon oben (vergl. pag. 85) bei der Theorie projectivischer Punktreihen kennen gelernt.

Analog jenem Specialfalle kann nun auch der allgemeine Pascal'sche Satz bewiesen werden.

Es sei ein Sechseck gegeben, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, und dessen Ecken wir der Reihe nach $A B' C A' B C'$ nennen wollen. Man fasse jetzt die Punkte ABC für sich gesondert auf, nehme noch einen 4ten ... Punkt der Curve, $D\ldots$, hinzu und denke sich den Büschel $S\,(ABCD\ldots)$, dessen Mittelpunkt S ein beliebiger Punkt des Kegelschnittes ist. Dann wähle man einen beliebigen anderen Curvenpunkt S', construire den Büschel S' $(A'B'C')$ .und bestimme zu jedem früheren Strahle D den entsprechenden D' in diesem zweiten Strahlbüschel. Auf diese Weise ist der Kegelschnitt Träger zweier projectivisch zugeordneter Punktreihen $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$ geworden; denn da das Doppelverhältniss $S\,(ABCD)$ immer dasselbe ist, wo auch S auf dem Kegelschnitte liegen möge, so werden wir, sobald die Punkte ABC und $A'B'C'$ als die den ersten entsprechenden zu Grunde gelegt sind, immer die nämliche Zuordnung zwischen weiteren Punkten D und D' erhalten müssen, wohin auch die Mittelpunkte S und S' auf dem Kegelschnitte verlegt werden mögen. In Bezug auf diese projectivischen auf dem nämlichen Träger gelegenen Punktreihen können nun ganz ähnliche Betrachtungen, wie bei Punktreihen auf einer Geraden, angestellt werden. Insbesondere besitzen sie zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte E, F, deren Construction sich aus Folgendem er-

geben wird. Projicirt man nun die Punkte $(ABCD\ldots)$ vom Punkte A', und die entsprechenden Punkte von A aus, so ist

$$A'(ABCD\ldots) \barwedge A(A'B'C'D'\ldots.)$$

Diese Büschel sind aber perspectivisch gelegen, weil AA' ein sich selbst entsprechender Strahl ist, also liegen die Durchschnitte

$$A'B \cdot AB' \quad A'C \cdot AC' \quad A'D \cdot AD'$$

auf einer Geraden g, welche den Kegelschnitt in zwei Punkten E, F schneidet. Diese Punkte sind die Doppelpunkte der auf dem Kegelschnitte vereinigten projectivischen Punktreihen $ABCD\ldots.$, $A'B'C'D'\ldots.$

Da nun ebenso $B'(ABCD..) \barwedge B(A'B'C'D')$ und somit auch die Durchschnitte

$$B'A \cdot BA', \quad B'C \cdot BC', \quad B'D \cdot BD'$$

auf einer Geraden liegen, welche wiederum den Kegelschnitt in denselben Doppelpunkten E, F schneidet, so liegen auf der Linie g die Durchschnitte aller kreuzweisen Verbindungslinien homologer Punkte der Reihen $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$, insbesondere also auch die Punkte:

$$AB' \cdot A'B, \quad BC' \cdot B'C, \quad CA' \cdot C'A;$$

dies sind aber die Durchschnitte der Gegenseiten des Sechseckes $AB'CA'BC'$. Ist die Linie g einmal aus diesem Sechsecke construirt, so findet man mit ihrer Hilfe leicht zu jedem Punkte D den projectivisch zugeordneten D'.*)

§. 6.

Die Erweiterung des Pascal'schen Satzes.

Der Pascal'sche Satz gestattet noch mannigfaltige Ausführungen, wie sie allen Sätzen der Geometrie der Lage mehr oder minder zukommen, auf die aber im Wesentlichen

---

*) Hierdurch erhält auch erst die Steiner'sche Construction der Doppelpunkte geradliniger projectivischer Punktreihen ihre rechte Beleuchtung (vergl. pag. 106). Nicht nur ein Kreis, sondern ein beliebiger, aber gezeichnet vorliegender Kegelschnitt kann, wie wir hier sehen, zu jener eleganten Construction verwendet werden.

erst Steiner ausdrücklich aufmerksam gemacht hat; wir gehen auf dieselbe hier näher ein, um an diesem Beispiele die Betrachtungsweisen kennen zu lernen, vermittels welcher die neuere Geometrie Sätze über die gegenseitige Lage von Punkten und Geraden in einer Ebene aufstellt.

Die 6 Punkte $ABCDEF$ auf einem Kegelschnitte können als Ecken eines vollständigen Sechseckes angesehen werden, welches $\frac{6.5}{2} = 15$ Seiten enthält und aus welchem auf 60 verschiedene Arten ein einfaches Sechseck sich zusammensetzen lässt. Man erhält dieselben, indem man vom Punkte A beginnend die übrigen 5 Punkte $BCDEF$ in allen möglichen 120 Permutationen durchläuft; zwei entgegengesetzte Permutationen liefern dabei das nämliche Sechseck, nur in entgegengesetztem Sinne vom Punkte A aus durchlaufen gedacht. Jene 15 Seiten s schneiden sich ausser in den 6 Ecken noch in $\frac{15.14}{2} - 6.10 = 45$ Punkten S. Jedem der 60 einfachen Sechsecke entspricht eine besondere Linie g, auf welcher die Durchschnitte gegenüberliegender Seiten liegen; man nennt solch eine Linie g die Pascal'sche Gerade; sie ist immer durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben charakterisirt, durch welche ihr zugehöriges Sechseck angedeutet wird. Entsprechend den 60 Sechsecken erhalten wir also zu 6 auf einem Kegelschnitte gelegenen Punkten 60 Pascal'sche Linien, deren eigenthümlicher Zusammenhang näher untersucht werden soll.

Zunächst ist klar, dass in jedem Punkte S, z. B. in $AB \cdot DE$ sich 4 Gerade g, nämlich alle diejenigen schneiden müssen, die zu solchen Sechsecken gehören, welche die beiden Seiten AB, DE als gegenüberliegende besitzen, also:

$$ABCDEF, \quad ABCEDF, \quad ABFDEC, \quad ABFEDC.$$

Steiner hat nun folgende Bemerkung gemacht: Auf der zu $ABCDEF$ gehörenden Geraden liegen die Durchschnitte:

$$AB \cdot DE, \quad BC \cdot EF, \quad CD \cdot FA.$$

Wir können also die Geraden:

$$\begin{matrix} AB & EF & CD \\ DE & BC & FA \end{matrix}$$

geben wird. Pr… als zwei Dreiseite bildend ansehen, deren entsprechende vom Punk… Seiten sich auf einer Geraden g schneiden, es werden daher so ist … die Verbindungslinien entsprechender Ecken, also in leicht verständlicher Bezeichnung die 3 Geraden:

AA' … di…

$$AB \cdot EF - DE \cdot BC \equiv ABCFED$$
$$EF \cdot CD - BC \cdot FA \equiv ADCBEF$$
$$CD \cdot AB - FA \cdot DE \equiv AFCDEB$$

durch einen Punkt P gehen. Jene drei Geraden sind aber die vorstehend angegebenen Pascal'schen Geraden g. Sie gehören zu solchen Sechsecken, welche, wie die Schemata zeigen, 3 abwechselnde Seiten, aber nicht mehr gemein haben, die in demselben Sinne, aber nicht in derselben Reihenfolge durchlaufen werden. So also wird ein Steiner'scher Punkt P erhalten, indem man aus dem Sechseck $ABCFED$ die Seiten AB, CF, ED herausgreift und diese in der Ordnung $ABEDCF$ zusammensetzt; dasselbe Sechseck kann man aber in die Punktepaare BC, FE, DA zerlegen und diese Seiten in der Ordnung $BCDAFE$ zusammensetzen. Geht man dann von einem der letzteren Sechsecke aus, so führt ein gleicher Process immer auf die nämlichen drei wieder zurück. Dieselbe Regel, welche zu einem Sechseck die beiden zugehörigen finden lehrt, lässt sich auch so aussprechen: Man halte in dem Schema der 6 Eckpunkte den ersten, dritten, fünften oder den zweiten, vierten und sechsten fest, und lasse jedesmal die übrigen drei ihre Plätze cyklisch vertauschen. Auf jeder Geraden g liegt also nur ein einziger Punkt P und da es 60 Pascalsche Linien giebt, die sich zu je 3 in einem Punkte P schneiden, so giebt es 20 Steiner'sche Punkte.*)

---

*) Hätte man jene Dreiseite anders combinirt, z. B. zu

$$AB,\ BC,\ CD \text{ und } DE,\ EF,\ FA$$

so fände man, dass sich die Linien:

$$AB \cdot BC - DE \cdot EF \equiv BE$$
$$BC \cdot CD - EF \cdot FA \equiv CF$$
$$CD \cdot AB - FA \cdot DE \equiv ABEDCF$$

in einem Punkte schneiden; das ist aber der Pascal'sche Satz. Ebenso liefern die zwei anderen noch möglichen Combinationen kein neues Resultat.

Ausser diesen Steiner'schen Punkten P hat Kirkmann noch andere entdeckt, die sich auf folgende Weise ergeben: In den auf der Geraden $ABCDEF$ liegenden Punkten

$$AB \cdot DE \qquad BC \cdot EF \qquad CD \cdot FA$$

schneiden sich ausserdem die Pascal'schen Linien:

$$\begin{array}{lll} ABCEDF & ABCDFE & AFBDCE \\ ABFDEC & AEFDBC & AFECDB \\ ABFEDC & AFEDBC & AFEDCB \end{array}$$

also concurriren in jenen Punkten die Geraden:

$$\begin{array}{lll} BC \cdot DF \frown CE \cdot FA, & AB \cdot DF \frown CD \cdot EA, & FB \cdot CE \frown BD \cdot EA \\ BF \cdot EC \frown FD . CA, & AE \cdot DB \frown FD \cdot CA, & FE \cdot DB \frown EC \cdot BA \\ BF \cdot DC \frown FE \cdot CA, & AF \cdot DB \frown ED \cdot CA, & FE \cdot CB \frown ED \cdot BA \end{array}$$

Verbinden wir hiervon 3 Gerade, indem wir aus jeder Columne eine herausgreifen, so erhalten wir jedesmal ein Dreieck. Nur in einem einzigen der so erhaltenen Dreiecke sind die Ecken Punkte S; es schneiden sich nämlich die Linien

$$ABFDEC \qquad AEFDBC \qquad AFBDCE$$

zu je zweien in den Punkten:

$$FD \cdot AC \qquad AE \cdot DB \qquad BF \cdot EC$$

Dieses Dreieck stützt sich mit demjenigen, welches aus den Seiten

$$AB \qquad EF \qquad CD$$

gebildet wird, auf dieselben 3 in gerader Linie liegenden Punkte; es werden daher die Ecken des letzteren, welche ebenfalls Punkte S sind, mit den entsprechenden Ecken des ersten auf drei Geraden liegen, welche sich in einem Punkte schneiden, d. h. die drei Pascal'schen Linien:

$$\begin{array}{l} FD \cdot CA \frown AB \cdot EF = ABDFEC \\ AE \cdot DB \frown EF \cdot CD = AEFBDC \\ BF \cdot EC \frown CD \cdot AB = ABFDCE \end{array} \qquad \text{II.}$$

gehen durch einen Punkt, der mit Q bezeichnet werden soll.

Auf jene 3 Punkte stützt sich aber auch das Dreiseit

$$DE, \qquad BC, \qquad FA$$

und es schneiden sich somit auch die drei Linien

$$FD \cdot CA - DE \cdot BC \equiv ACBFDE$$

III. $$AE \cdot DB - BC \cdot FA \equiv AFDBCE$$

$$BF \cdot EC - FA \cdot DE \equiv AFBDEC$$

in einem neuen Punkte *Q*.

Da endlich auch die Dreiseite

AB	*EF*	*CD*
DE	*BC*	*FA*

sich auf die nämlichen drei Punkte in einer Geraden stützen, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken

ABCFED *ADCBEF* *AFCDEB*

durch einen Punkt, der aber jetzt ein Punkt *P* ist. Die beiden Punkte *Q* und der Punkt *P* sind die Projectionscentra dreier Dreiecke, welche sich auf dieselben 3 Punkte einer Projectionsaxe stützen, mithin liegen (nach den Sätzen im §. 3 d. Abschnittes III) 2 Punkte *Q* mit einem Punkte *P* auf einer Geraden. Hierzu kann man noch eine weitere Bemerkung machen. Der *P*-Punkt I nämlich und die *Q*-Punkte II, III stehen in der Beziehung zu einander, dass die Sechsecke, deren Pascal'sche Linien sich in einem der Punkte *Q* schneiden, zwei gegenüberliegende Seiten mit den Sechsecken, deren Pascal'sche Linien sich in *P* schneiden, gemein haben und zwar in demselben Sinne; so hat *ABCFED* mit *ABDFEC* die Seiten *AB*, *FE*, mit *ACBFDE* die Seiten *BC*, *ED* gemeinsam. Es wird daher noch ein dritter *Q*-Punkt erhalten, welcher sich aus einem Sechseck ergiebt, das mit *ABCFED* die Seiten *CF*, *DA* gemein hat, und zwar wird dieser durch den Durchschnitt von:

IV. *ADBFCE*, *ACEBFD*, *ACFDBE*

dargestellt. Es liegt demnach ein *P*-Punkt mit 3 *Q*-Punkten auf einer Geraden; die Anzahl dieser Geraden ist 20 (Salmon-Cayley'sche Geraden).

Es ist nun noch nothwendig das Gesetz genauer zu verfolgen, nach welchem die 3 Pascal'schen Linien, die sich in einem Punkte *Q* schneiden, combinirt werden müssen. Dazu betrachte man das System II. Geht man von *ABDFEC* aus, so trenne man dies in die Paare *BD*, *FE*, *CA* und setze diese in derselben Ordnung zusammen, kehre indess

den Sinn von zwei Seiten dabei um, etwa BD und CA, so erhält man $DBFEAC$. Um die dritte Linie zu erhalten, theile man $ABDFEC$ auf die zweite noch mögliche Weise in AB, DF, EC und lasse jetzt, während vorhin EF nicht geändert wurde, die Seite AB unverändert bestehen, welche weder E noch F enthält, so folgt $ABFDCE$.

Um hiernach die Punkte Q zu finden, welche z. B. auf $ABCDEF$ liegen, theilen wir dies in AB, CD, EF und BC, DE, FA. Indem wir zunächst AB, DE unverändert lassen, finden wir:

$$Q \equiv ABCDEF \cdot ABDCFE \cdot AFCBDE$$

indem wir CD, FA ungeändert lassen:

$$Q \equiv ABCDEF \cdot ACDFEB \cdot ACBEDF$$

indem wir EF, BC ungeändert lassen:

$$Q \equiv ABCDEF \cdot ADCEFB \cdot AFBCED.$$

Es liegen demnach auf jeder Linie g, deren es 60 giebt, 3 Punkte Q, in denen sich 3 Linien g schneiden, und es existiren daher 60 Punkte Q.

Der oben bewiesene Satz, dass 3 Q-Punkte mit einem P-Punkte auf einer Geraden liegen, ist von Cayley in anderer Weise hergeleitet worden, worauf wir hier noch eingehen wollen, weil dabei nicht wie vorstehend der dritte Punkt Q durch eine combinatorische Betrachtung gewonnen wird, die einen eigentlich geometrischen Grund nicht erkennen lässt.

Betrachten wir die Geraden des Systemes II, so liegen auf ihnen je drei Punkte S, nämlich:

	(a)	(b)	(c)
$ABDFEC =$	$AB \cdot EF$	$DB \cdot CE$	$FD \cdot CA$
$AEFBDC =$	$EF \cdot CD$	$FB \cdot CA$	$AE \cdot DB$
$ABFDCE =$	$CD \cdot AB$	$FD \cdot EA$	$BF \cdot EC$

Da diese Geraden in einem Punkte Q zusammenlaufen, so stellen die drei Columnen rechter Hand drei Dreiecke vor, deren entsprechende Ecken auf drei Geraden, die sich in einem Punkte schneiden, gelegen sind. Es werden sich

daher die entsprechenden Seiten von je zwei Dreiecken in drei Punkten schneiden, welche auf einer geraden Linie liegen. Die Dreiecke (a) und (b) haben als Trägerin der Durchschnitte entsprechender Seiten die Gerade *ADCFEB*, die Dreiecke (a) und (c) als Trägerin die Linie *ABCDEF*. Die Seiten der Dreiecke (b) und (c) endlich schneiden sich beziehentlich in den Punkten:

ACEFBD · *AEFDBC*
ACDFBE · *AFBDCE*
AECFDB · *ABFDEC*

welche auf einer Geraden liegen. Da diese Linie, zufolge des eben benutzten Satzes durch den Durchschnitt der Linien *ADCFEB* und *ABCDEF* hindurchgehen muss, so liegen diese vier Punkte auf einer Geraden; die drei ersten sind aber Punkte *Q*, der letztgenannte ein Punkt *P*.

Es bleibt uns schliesslich noch übrig, auf die Gruppirung der 20 Steiner'schen Punkte *P* näher einzugehen. Der Projectionsaxe:

ABCDEF

entsprach als Durchschnitt der Verbindungslinien entsprechender Ecken der Punkt I

ABCFED · *ADCBEF* . *AFCDEB*.

Mit jener Geraden schneiden sich in einem Punkte *S*, nämlich in *AB* · *DE*, 3 weitere Pascal'sche Linien,

ABCEDF *ABFDEC* *ABFEDC*

denen als Projectionsaxen bezüglich die *P*-Punkte entsprechen:

ABCFDE · *AECBDF* · *AFCEDB*
ABFCED · *ADFBEC* · *ACFDEB*
ABFCDE · *AEFBDC* · *ACFEDB*

Mithin liegen die genannten 4 *P*-Punkte auf einer Geraden *i*; zu jedem der 45 Punkte *S* gehört eine solche Gerade *i*. Da nun auf jeder Pascal'schen Linie 3 *S*-Punkte liegen, so kommt jede Gerade als Projectionsaxe und also auch der ihr zugehörige Projectionspunkt *P* bei dieser Construction

3mal in Betracht; d. h. durch jeden P-Punkt gehen 3 Linien i. Umgekehrt aber gehört ein P als Projectionspunkt zu drei Projectionsaxen, so z. B. der Punkt P (I) zu den Geraden:

$$ABCDEF \quad ADCFEB \quad AFCBED^{*})$$

d. h. indem man von jedem der 45 S-Punkte ausgehend die Linien i bestimmt, wird man von je 3 S-Punkten aus zu der nämlichen Geraden i geführt. Die 20 Steiner'schen Punkte P liegen also zu je 4 auf 15 Geraden, so zwar, dass durch jeden Punkt P 3 dieser Linien hindurchgehen (Plücker'sche Geraden).

Dies sind die ihrer Einfachheit wegen wichtigsten Bemerkungen, welche man an einem vollständigen Pascal'schen Sechsecke machen kann; auf das von Kirkman, Cayley u. A. noch sehr weit entwickelte Detail können wir hier nicht eingehen.

§. 7.

Die einem Kegelschnitte eingeschriebenen Fünfecke, Vierecke, und Dreiecke.

Aus dem Pascal'schen Satze kann man, indem man Punkte zusammenfallen lässt, noch eine grosse Reihe neuer Sätze ableiten. Rückt der Punkt F mit dem Punkt E zusammen, so geht die Seite EF in die Tangente am Punkte E über, und man erhält ein Fünfeck $ABCDE$. Da auch jetzt die Punkte:

$$AB \cdot DE \quad BC \cdot EE \quad CD \cdot EA$$

in einer Geraden liegen, so hat man den Satz:

Bei jedem, einem Kegelschnitte eingeschriebenen Fünfecke liegen die Durchschnitte von zwei Paaren nicht auf-

---

*) Man erkennt, dass diese 3 Pascal'schen Linien, denen der nämliche Punkt P als Projectionspunkt zukommt, sich wiederum in einem P-Punkte schneiden. Die beiden P-Punkte, welche in der gegenseitigen Relation zu einander stehen, dass die drei durch den einen hindurchgehenden Geraden zu ihrem Projectionspunkte den anderen haben, werden Gegenpunkte genannt. Die 20 Steiner'schen Punkte zerfallen also in 10 Paare von Gegenpunkten.

einander folgender Seiten in einer Geraden mit demjenigen Punkte, in welchem die fünfte Seite von der Tangente des gegenüberliegenden Eckpunktes geschnitten wird.

Hieraus ergiebt sich eine directe Lösung der Aufgabe: Ist ein Kegelschnitt durch fünf Punkte gegeben, so sollen die Tangenten in diesen Punkten mittels des Lineales gezeichnet werden. Denn seien *ABCDE* die 5 Punkte und soll in *E* die Tangente construirt werden, so ziehe man die Gerade *AB* · *DE* — *CD* · *EA*; der Durchschnitt dieser Linie und der Geraden *BC* liefert, verbunden mit *E*, die gesuchte Tangente. — Die nämliche Construction lässt sich aus der fundamentalen Erzeugungsweise des Kegelschnittes ableiten, wenn man bedenkt, dass diejenigen Strahlen zweier collinearer Büschel, welche der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte entsprechen, Tangenten am Kegelschnitte sind. —

Lässt man in dem Pascal'schen Sechsecke zwei Punktpaare zusammenfallen, so dass es in der Form *ABBCCD* geschrieben werden kann, so erhält man ein Viereck *ABCD* nebst den beiden Tangenten in *B* und *C*. Bemerkenswerthe Sätze über die Durchschnitte der Tangenten *BB*, *CC* und der übrigen Seiten liefern nur die drei Sechsecke, in denen die Seiten *BB*, *CC* erscheinen, also:

ABBDCC, *ABBCCD*, *ADBBCC*

für die übrigen Fälle werden die Sätze trivial. Unter jenen drei Sechsecken ist dann das erste besonders hervorzuheben. Es lehrt uns nämlich, dass

AB · *DC*, *BB* · *CC*, *BD* · *CA*

in gerader Linie liegen, was in Worte gefasst so lautet: Construirt man in zwei Punkten *B*, *C* eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen vollständigen Viereckes *ABCD* die zwei Tangenten, so schneiden sich diese auf der Geraden, welche zwei Durchschnitte gegenüberliegender Seiten, nämlich die Punkte *AB* · *DC*, *BD* · *CA* verbindet. Zieht man dann weiter die Tangenten in *A* und *D*, so schneiden sich diese auf einer Geraden, welche (da die Vertauschung von *B*, *C* mit *A*, *D* jene beiden Punkte *AB* · *DC*, *BD* · *CA* nicht ändert) die nämliche bleibt. Diese 4 Tangenten bilden ein vollständiges Vierseit, dessen eine Diagonale die Ge-

rade ist, welche durch zwei Durchschnitte der Gegenseiten (Diagonalpunkte) des eingeschriebenen Vierecks bestimmt wird. Vervollständigt man also die Figur, indem man die 3 Diagonalpunkte des Vierecks, und die 3 Diagonallinien des Vierseits construirt, so erhält man den wichtigen Satz:

Ist in denselben 4 Punkten einem Kegelschnitte ein Viereck ein- und ein Vierseit umbeschrieben, so gehen die Diagonalen des letzteren durch je zwei Diagonalpunkte des ersteren, und es liegt umgekehrt ein Diagonalpunkt des Viereckes auf zwei Diagonalen des Vierseites. Betrachtet man nur das unvollständige Viereck $ABCD$ und ebenso nur das Viereck, welches die Tangenten in A, B, C, D durch diese Aufeinanderfolge bilden, so kann man dem vorstehenden Satze auch folgende speciellere Fassung geben: Wird ein Viereck einem Kegelschnitte ein- und ein anderes in denselben Punkten ihm umbeschrieben, so schneiden sich die Diagonalen beider in einem und demselben Punkte.

Aus diesen Sätzen ergeben sich die Lösungen folgender einander dualistisch entsprechender Aufgaben:

1) Wenn 4 Tangenten eines Kegelschnittes und der Berührungspunkt auf einer derselben gegeben sind, so sollen die Berührungspunkte der 3 übrigen Tangenten gefunden werden. — Man verbinde jenen gegebenen Berührungspunkt mit den 3 Durchschnitten der Diagonalen des vollständigen Vierseites, so werden diese Verbindungslinien die betreffenden Tangenten in ihren Berührungspunkten schneiden.

2) Wenn 4 Punkte eines Kegelschnittes und die Tangente in einem derselben gegeben sind, so sollen die Tangenten an den 3 anderen Punkten construirt werden. Man schneide die gegebene Tangente mit den 3 Verbindungslinien der Diagonalpunkte des vollständigen Viereckes, so werden diese Durchschnittspunkte, verbunden mit den entsprechenden Ecken des gegebenen Viereckes die zugehörigen Tangenten bestimmen.

Betrachten wir noch die Folgerungen aus dem Pascal'schen Satze bei seiner Anwendung auf

$$ADBBCC \text{ und } ABBCCD.$$

Es werden sich die Punkte:

$$AD \cdot BC, \quad DB \cdot CC, \quad BB \cdot CA$$

auf einer geraden Linie befinden und ebenso

$$AB \cdot CC, \quad BB \cdot CD, \quad BC \cdot DA.$$

Es gehen also die Linien $DB \cdot CC — BB \cdot CA$, $AB \cdot CC — BB \cdot CD$ durch den einen Punkt $AD \cdot BC$. Denkt man sich nun die Tangenten auch in A und D construirt, so werden sich, wie aus der Vertauschung der Buchstaben A und B, D und C hervorgeht, die Linien: $CA \cdot DD — AA \cdot DB$, $AB \cdot DD — AA \cdot CD$ in dem nämlichen Diagonalpunkt $AD \cdot BC$ schneiden. Durch jeden Diagonalpunkt des Viereckes $ABCD$ gehen demnach 4 Linien, welche als Verbindungen der Durchschnitte von Seiten des Vierseites mit Seiten des Viereckes gewonnen werden, — Beziehungen, welche zu weiteren Sätzen Anlass geben.

Lässt man schliesslich in einem Pascal'schen Sechsecke dreimal zwei Punkte zusammenfallen, so dass es in $AABBCC$ übergeht, so liegen:

$$AA \cdot BC = A' \quad AB \cdot CC = C' \quad BB \cdot CA = B'$$

auf einer Geraden; d. h.

Wird einem Kegelschnitte in denselben Punkten ein Dreieck ein- und ein anderes umgeschrieben, so liegen die Durchschnitte der entgegengesetzten Seiten beider Dreiecke in einer Geraden.*)

Aus diesem Satze folgt die Lösung der Aufgabe:

An einem gegebenen Punkte eines Kegelschnittes die Tangente zu ziehen, wenn zwei Tangenten an demselben und deren Berührungspunkte gegeben sind.

Man kann aus obigem noch einen weiteren Lehrsatz ableiten: Da nämlich das von den Tangenten gebildete

---

*) Dieser Satz ist durch Projection leicht zu erweisen. Projicirt man nämlich die Figur so, dass der Kegelschnitt ein Kreis wird, die Punkte $B'C'$ aber in's Unendliche fallen, so wird das Dreieck ABC ein gleichseitiges, die Tangente vom Punkte A wird parallel der Linie BC; die Durchschnittspunkte $A'B'C'$ liegen also auf einer Geraden, nämlich der unendlich fernen.

Dreieck zum eingeschriebenen so gelegen ist, dass sich die entsprechenden Seiten beider Dreiecke auf einer Geraden schneiden, so müssen auch die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen. Verbindet man also die Ecken eines einem Kegelschnitte umschriebenen Dreieckes mit den Berührungspunkten der Gegenseiten, so schneiden sich diese drei Linien in einem Punkte. Hiemit löst sich nun folgende, der vorigen dualistisch entsprechende Aufgabe: Den zu einer gegebenen Tangente eines Kegelschnittes gehörigen Berührungspunkt zu finden, wenn zwei andere Tangenten nebst ihren Berührungspunkten gegeben sind. — Beide Aufgaben enthalten Bestimmungen, aus denen sich immer ein Kegelschnitt eindeutig construiren lässt.

Alle in diesem §. aus dem Pascal'schen Sechsecke abgeleiteten Lehrsätze und Constructionen folgen ebenso leicht aus den Grundeigenschaften projectivischer Büschel; so beweist sich der für das Viereck aufgestellte Satz folgendermaassen: Sind drei Paare homologer Strahlen $S\,(a,b,c)$ und $S'\ (a',b',c')$ gegeben, so construire man die Linien:

$$a'b \frown ab',\quad b'c \frown bc',\quad c'a \frown ca'$$

die durch einen Punkt G gehen; durch diesen Punkt wird dann auch, wenn d, d' ein neues Paar homologer Strahlen ist, $a'd \frown ad'$ u. s. w. gehen. Lassen wir a' mit $S'S$ zusammenfallen, so wird a die Tangente des Kegelschnittes im Punkte S. Durch 4 Punkte S,S'; b,b'; c,c', und die Tangente in einem derselben, in S, wird daher ein Kegelschnitt bestimmt. Der Punkt G findet sich dann als der Durchschnitt von a mit $b'c \frown bc'$.

Sucht man nun zu $SS' = d$ den entsprechenden Strahl d' im Büschel S', so muss $bd' \frown b'd$ durch G gehen, d. h. da $b'd = S'$, es muss d' mit $S'G$ zusammenfallen, also G auf der Tangente d' liegen. Die Tangente in S schneidet sich demnach mit der Tangente in S' in einem Punkte G, welcher auf der Geraden $b'c \frown bc'$ liegt. *Q. e. d.*

---

§. 8.

Der Kegelschnitt als Tangentengebilde.

Sei $CC'X'X$ ein einem Kegelschnitte umschriebenes Viereck mit den Seiten $ss'cx$, Q der Berührungspunkt von $CC' = c$, A der von $CX = s$, B' der von $C'X' = s'$, P der von $XX' = x$, dann gehen nach dem Satze vom Vierecke die Geraden

$$CX', \quad C'X, \quad AB', \quad PQ$$

immer durch einen Punkt R. Denken wir uns nun den Berührungspunkt der einen Tangente P und mit ihm die Tangente XX' veränderlich, die Tangenten s, s', c und deren Berührungspunkte aber fest, so beschreiben X, X' zwei projectivische Punktreihen auf den festen Tangenten s, s'. Denn die Strahlen des mit der Punktreihe X projectivischen Strahlenbüschels $C'X$ schneiden die homologen Strahlen des anderen Büschels CX' in einem Punkte R, der sich auf der festen Geraden AB' bewegt. Die beiden Strahlen sind also perspectivisch, und daher deren Durchschnitt mit jener Geraden projectivisch.

Eine bewegliche Tangente eines Kegelschnittes beschreibt auf zwei festen Tangenten zwei projectivische Punktreihen.

Gleitet der bewegliche Berührungspunkt P die Curve entlang, so beschreibt QP einen Strahlbüschel um den festen Punkt Q, und da auch QP stets durch R geht, so ist dieser Büschel projectivisch mit denen in C und C', d. h. auch projectivisch mit den Punktreihen X, X'. Bewegt sich also eine Tangente auf einem Kegelschnitte, so schneidet sie eine feste Tangente in einer Punktreihe, welche projectivisch ist mit einem Büschel, welchen die Verbindungslinie irgend eines Punktes der Curve mit ihrem Berührungspunkte beschreibt.

Es gilt nun aber auch umgekehrt der Satz:

Bewegt sich eine Gerade XX' so, dass sie zwei feste Gerade ss' in projectivischen Punktreihen schneidet, so umhüllt sie einen Kegelschnitt.

Denn seien A, B' die auf s, s' dem Schnittpunkte ss' entsprechenden Punkte der beiden projectivischen Punktreihen, C, C' zwei beliebige andere homologe Punkte, so ziehe man CC' und construire den Kegelschnitt, welcher diese Linien berührt, und zwar die Linie s in A, s' in B'. Nach einer im vorigen §. gegebenen Construction ist ein solcher immer möglich und durch diese 5 Bedingungen eindeutig bestimmt; eine bewegliche Tangente desselben schneidet ss' in projectivischen Punktreihen, bei denen sich ABC, bezüglich mit $A'B'C'$ entsprechen; d. h. alle Verbindungslinien homologer Punkte der gegebenen Punktreihen sind Tangenten des construirten Kegelschnittes.

Der umhüllte Kegelschnitt wird insbesondere ein Kreis, wenn wir specielle, auf metrische Verhältnisse bezügliche Voraussetzungen machen. Bewegt sich nämlich eine Gerade PP' auf den Schenkeln p, p' eines gleichschenkligen Dreieckes so, dass sie von der Mitte C der Basis JI' immer unter dem constanten Winkel α (oder dessen Supplemente), welcher dem Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks gleich ist, erscheint, so umhüllt sie einen Kreis, dessen Mittelpunkt C ist und der die beiden Schenkel p, p' berührt. — Denn bezeichnet man den Schnittpunkt von p, p', je nachdem man ihn zu p oder p' gehörend ansieht, mit B oder A', so ist zunächst klar, dass p und ebenso p' Tangenten der Curve sind; rückt nämlich P' nach A', so fällt PP' mit p zusammen; der Berührungspunkt A wird in diesem Grenzfalle aus $\angle A'CA = \alpha$ bestimmt; es steht demnach CA senkrecht auf p. Ebenso berührt die Curve die Linie p' in einem Punkte B', der durch die Relation $CB' \perp p'$ bestimmt ist. Ueberdies ist, nach der Voraussetzung über die Lage von C, $CA = CB'$. Beschreibt man jetzt um C mit dem Radius $CA = CB$ einen Kreis, so wird derselbe von p, p' berührt. Nimmt man nun auf p einen beliebigen Punkt P, zieht von diesem die Tangente an den Kreis, welche p' in P' schneidet, so ist nach einem bekannten Satze aus der Elementargeometrie der Winkel $P'CP = \alpha$ (oder je nach dem Sinne der Drehung auch $180 - \alpha$); es ist also PP' eine Lage der beweglich gedachten Linie, wie sie nach der Voraussetzung statt haben soll,

d. h. die Linie PP' berührt in allen ihren Lagen den Kreis. —

Mit diesen letzten wichtigen Sätzen sind wir an eine systematische Betrachtung des Erzeugnisses zweier projectivischer Punktreihen gelangt. Während wir nämlich bisher in einseitiger Weise diejenigen Curven untersucht haben, deren Punkte durch die Schnitte zweier projectivischer Strahlbüschel gebildet werden, drängt sich uns hier die Frage nach den Curven auf, die von den Verbindungslinien homologer Punkte in zwei projectivischen Punktreihen umhüllt werden; zugleich aber ergibt sich als Lösung dieser Frage die Antwort, dass diese Curven keine anderen als die Kegelschnitte selbst sind. Wie wir indess früher das Erzeugniss zweier projectivischer Strahlbüschel mit einem Kegelschnitte identificirten, weil wir sahen, dass jene Curve die Eigenschaft besitzt, sich in einen Kreis projiciren zu lassen, so werden wir auch hier, unabhängig von den erst abgeleiteten Eigenschaften des einem Kegelschnitte umschriebenen Viereckes, den Satz aufstellen und beweisen können:

Eine Curve, welche von den Projectionsstrahlen umhüllt wird, welche homologe Punkte P, P' irgend zweier projectivischer Punktreihen p, p' verbinden, ist ein Kegelschnitt, d. h. sie kann immer in einen Kreis projicirt werden.

Man nehme in dem inneren Raume der Curve einen Punkt C an, durch den daher kein Projectionsstrahl hindurchgeht; denke sich ferner die Büschel, welche C mit den Punkten P auf p und den homologen P' auf p' bildet, so werden diese keine reellen Doppelstrahlen besitzen; sie werden demnach auch eine beliebige Linie l in ihrer Ebene ε in Punktreihen Q, Q' schneiden, welche imaginäre Doppelpunkte haben. Es gibt demnach einen Kreis von Punkten Q in einer auf l senkrechten Ebene, von welchem aus die Segmente QQ' unter einem constanten Winkel QOQ' erscheinen. Wir wählen jetzt einen jener Punkte O beliebig aus, legen eine Ebene ε, parallel der Ebene, die durch O und l bestimmt ist, und projiciren von O als Augenpunkt aus die ganze

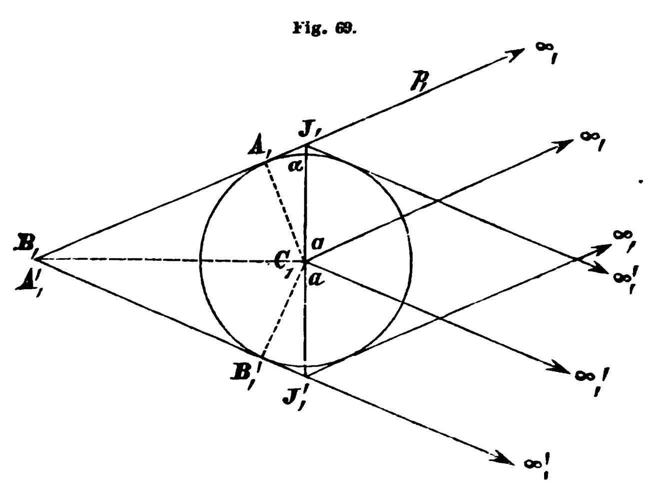
Ebene ε auf die Ebene ε_1, wobei die Projectionen mit dem Index 1 bezeichnet werden sollen. Die Projectionen aller Strahlen CP, CP' werden jetzt durch den gemeinsamen Punkt C_1 gehen und parallel sein den Strahlen OQ, OQ'; denn es liegen $OQPCC_1P_1$ in einer Ebene und es sind OQ, C_1P_1 deren Schnitte mit parallelen Ebenen. Es wird demnach der Winkel $P_1C_1P_1' = QOQ' =$ const. sein. Es leuchtet nun ein, dass sowohl die Projectionen der Geraden p, p', als auch die der beweglichen PP' Tangenten der Projection unserer Curve sein werden, P_1CP_1' ist demnach der Winkel, unter welchem von C_1 aus die zwischen zwei festen Tangenten p_1p_1' eingeschlossenen Stücke der beweglichen Tangente P_1P_1' erscheinen.

Soll nun die Projection der Curve ein Kreis werden, so müssen wir noch der bisher ganz unbestimmt gelassenen Geraden l eine bestimmte Lage geben. Wir legen nämlich durch C eine beliebige Gerade, welche die p, p' etwa in J, I' schneiden mag, bestimmen die homologen Punkte J', I zu jenen Punkten, und legen durch diese unsere Gerade l. Da nun l, damit aber auch die Punkte $J'I$ in der Projection in's Unendliche rücken, so sind die homologen Punkte J_1I_1', die mit C_1 in einer Geraden liegen, die Fluchtpunkte der Geraden p_1, p_1'.

Wir haben somit in unserer Ebene ε_1 eine Curve, welche zwei feste Gerade p_1, p_1' zu Tangenten hat; jede andere Tangente, welche diese in P_1P_1' schneidet, hat die Eigenschaft, dass die Strecke $P_1'P_1$ immer unter demselben Winkel erscheint, gesehen von einem Punkte C_1, der sich auf der Verbindungslinie der Fluchtpunkte J_1I_1' befindet.

Wir können nun leicht zeigen, dass unter diesen Bedingungen J_1, I_1' nothwendig senkrecht auf der Halbirungslinie des Winkels p_1p_1' stehen und C_1 in seiner Mitte liegen muss. Denn zieht man (Fig. 69) $J_1\infty_1'$, so ist das eine Lage der Tangente und setzt man $J_1C_1\infty_1' = \pi - \alpha$, so wird auch $I_1'C_1\infty_1 = \pi - \alpha$. Daher ist $J_1C_1\infty_1 = \alpha$, $I_1'C_1\infty_1' = \alpha$ und somit wegen der Parallelen $B_1J_1C_1 = A_1'I_1'C_1 = \alpha$ und daher $B_1J_1I_1'A_1'$ ein gleichschenkliges Dreieck, also $J_1B_1 = I_1'A_1'$. Nun sind aber die Punktreihen P_1P_1' projectivisch, somit

Fig. 69.



$$J_1 P_1 \,.\, I_1' P_1' = J_1 A_1 \,.\, I_1' A_1' = J_1 B_1 \,.\, I_1' B_1'$$

also wegen $J_1 B_1 = I_1' A_1'$, auch $J_1 A_1 = I_1' B_1'$, wo A_1, B_1' die Berührungspunkte der Curve mit $p_1 p_1'$ sind. Nun ist $A_1' C_1 A_1 = \alpha$, $B_1' C_1 B_1 = \alpha$, also $\triangle A_1 C_1 B_1 \cong \triangle B_1' C_1 A_1'$, demnach $C_1 A_1 = C_1 B_1'$, d. h. C_1 liegt auf der Halbirungslinie des Winkels $p_1 p_1'$. Die durch Projection erzeugte Curve ist also nach dem vorigen Satze ein Kreis, dessen Mittelpunkt in C liegt. Wir können hieraus zugleich die für die Methode der Projectionen wichtige Folgerung ziehen:

Ein Kegelschnitt kann stets so in einen Kreis projicirt werden, dass ein beliebiger innerhalb des Kegelschnittes liegender Punkt C der Mittelpunkt des Kreises wird.

§. 9.

Die Curve zweiter Classe als Kegelschnitt. Der Satz von Brianchon und seine Folgerungen.

Die gesammte Geometrie zerfällt, wie schon in einem früheren Abschnitte (II) hervorgehoben wurde, in zwei einander duale und parallele Parthieen. In der einen gilt der Punkt als Element und jede Linie, gerade oder krumme, wird als durch die Bewegung eines solchen entstanden, als geometrischer Ort eines Punktes ange-

sehen. In der anderen dagegen bildet die Gerade das Element und jede Curve, aufgefasst als durch die Bewegung einer geraden Linie entstanden, wird als die Gesammtheit der sie einhüllenden Schaar von Geraden (als Enveloppe ihrer Tangenten) betrachtet. Wie man nun die Curven, insofern sie geometrische Oerter sind, nach Ordnungen eintheilt, d. h. nach der Anzahl von Punkten, in denen eine Gerade im Allgemeinen die Curve schneidet, so unterscheidet man die Curven, insofern man sie als Liniengebilde betrachtet, nach Classen und nennt sie von der $n$ten Classe, wenn durch jeden beliebigen Punkt der Ebene im Allgemeinen n Gerade gehen, welche zu der die Curve erzeugenden Geradenschaar gehören, d. h. Tangenten an die Curve sind.*)

Diese Schaar von Tangenten nennt man einen Strahlbüschel $n$ter Ordnung. Von der 1. Ordnung ist ein Büschel, dessen sämmtliche Strahlen durch einen Mittelpunkt gehen. Dieser Mittelpunkt ist das Umhüllungsgebilde, das Erzeugniss des Büschels — die Curve erster Classe. Die Curve, welche von den Projectionsstrahlen zweier geradliniger projectivischer Punktreihen s, s' umhüllt wird, ist von der 2. Classe. Denn um die Tangenten von einem Punkte P aus zu finden, construire man die zu den Punktreihen perspectivisch liegenden Büschel P_s, P_s'; die Doppelelemente dieser Strahlbüschel mit gemeinsamem Mittelpunkte werden die gesuchten Tangenten sein und es gibt immer zwei solcher Strahlen. — Definirten wir als Tangenten einer Curve $n$ter Ordnung diejenigen Linien, bei welchen von den n Schnittpunkten ein Paar von Punkten zusammengerückt ist, so werden wir hier als Punkt der Curve diejenigen Punkte der Ebene bezeichnen müssen, in

*) Es möge hier daran erinnert werden, dass diese Eintheilung in Ordnung oder Classe keineswegs bei allen ebenen Curven anwendbar ist; so können ja, um nur eines zu erwähnen, Curven, z. B. die spiralförmigen, von den Geraden in unendlich vielen Punkten geschnitten werden. Im Gegensatze zu den algebraischen, als deren einfachste wir die Gerade und die Kegelschnitte hier betrachten, nennt man dann solche Curven transscendente.

welchen von den n an die Curve ausgehenden Tangenten ein Paar von Linien zusammengefallen ist, so dass von diesem Punkte nur noch $n-1$ verschiedene Linien, unter denen indess eine doppelt gezählt werden muss, an die Curve gezogen werden können. Bei der Curve zweiter Classe sind insbesondere die beiden Träger der projectivischen Punktreihen s und s' Tangenten der Curve. Denn bestimmt man zu dem Durchschnittspunkte ss', als der Punktreihe s angehörig, den in s' homologen Punkt S', so wird die Verbindungslinie dieser entsprechenden Punkte durch s' dargestellt; desgleichen erhält man, indem zu $s's$ als s' angehörig der homologe Punkt S in s construirt wird, als Tangente der Curve die Linie s. Die Punkte S und S' selber sind Punkte der Curve; denn während von jedem anderen Punkte der beiden Geraden s und s' zwei Tangenten an die Curve ausgehen, nämlich die Linien s, (bez. s') und die Verbindungslinie des Punktes mit seinem homologen, sind in S (bez. S') beide Tangenten nur durch die Linie s (s') repräsentirt.

Wir haben nun bereits auf zweierlei Weisen die wichtige Wahrheit erkannt, dass die Curven 2. Ordnung völlig identisch mit der Curve 2. Classe sind, — wenn man nämlich diese zugleich auch als Punktgebilde, die ersteren zugleich auch als Liniengebilde auffasst — d. h. dass jede auf die eine Weise erzeugte Curve zugleich auch auf die andere erzeugt werden kann. Es gibt jedoch noch einen dritten Weg, sich davon zu überzeugen, und zwar einen solchen, der sich am besten der Methode anschliesst, die wir bisher in der neueren Geometrie befolgt haben. Die Construction, aus welcher wir die Curven 2. Classe entstehen liessen, steht in völlig dualer Beziehung zu derjenigen, welche die Curven 2. Ordnung erzeugte. Es lassen sich demnach, wie wir dies früher bei den projectivischen Büscheln und Punktreihen gethan haben, die Curven 2. Ordnung und 2. Classe durchaus parallel behandeln, ohne dass wir ihre Identität zunächst als bekannt voraussetzen. Wenn nun diese parallelen Entwickelungen einmal an irgend einer Stelle zusammenlaufen, d. h. ein Satz mit seinem dualen zusammenfällt, so wird sich daraus rückwärts auch die

Identität der Punkt- und Tangentengebilde erschliessen lassen. Diese Methode, welche vor jeder anderen den Vorzug hat, dass sie keiner der beiden Erzeugungsweisen den Vorrang gibt, wollen wir nun befolgen. (Wir erlauben uns dabei das Resultat derselben insoweit zu anticipiren, dass wir, wo die Unterscheidung nicht nothwendig ist, auch eine Curve 2. Classe als Kegelschnitt bezeichnen.) Dabei werden wir zugleich die zu den früheren dualen und ebenso interessanten Sätze kennen lernen und mit der Natur der Curven als Tangentengebilde genau bekannt werden.

Es ist zunächst nachzuweisen, dass wenn eine Curve durch die Projectionsstrahlen der beiden Punktreihen e, f construirt wird, eine bewegliche Tangente auch auf zwei beliebigen anderen Tangenten a, b projectivische Punktreihen beschreibt, dass daher die Curve auch von a, b aus construirt werden könnte und demnach die ursprünglich gegebenen Punktreihen keine besondere Lage zu der erzeugten Curve haben. Ist nämlich $e\,(abcd) \overline{\wedge} f\,(abcd)$, so ist auch $a\,(cdef) \overline{\wedge} b\,(cdef)$. Denn projicirt man vom Durchschnitte der Tangenten $cd = L$ die Punkte ea, eb; fa, fb bezüglich durch die Strahlen $a'b'$; $a''b''$, so wird nach der Voraussetzung das Doppelverhältniss $(a'b'cd) = (a''b''cd)$, also auch $(cd\,a'a'') = (cd\,b'b'')$. Schneidet man diese Strahlen durch die Geraden a und b, so wird $a\,(cdef)$ $\overline{\wedge}$ $b\,(cdef)$. Dieser Satz lässt sich auch so formuliren: *Das Doppelverhältniss von 4 Punkten, welche 4 feste Tangenten $abcd$ einer Curve zweiter Classe auf einer beweglich gedachten Tangente p ausschneiden, hat immer denselben Werth für jede Lage der Tangente p.* (Vergl. pag. 172.)

Das Verfahren, um zu 5 Tangenten eines Kegelschnittes irgend eine 6te zu finden, geht unmittelbar aus dem früher gelehrten hervor: die projectivischen Punktreihen zu vervollständigen, welche durch drei Punktpaare auf zwei Geraden bestimmt sind. Nehmen wir die dort als erste gegebene Lösung, so haben wir folgende Construction. Es seien $abcde$ die 5 gegebenen Tangenten, so werden cde auf a und b zwei collineare Punktreihen, CDE und $C'D'E'$ feststellen; nimmt man nun z. B. auf c zwei Punkte S und

S' an, und projicirt von S aus die Punkte CDE, von S' aus $C'D'E'$, so entstehen in S und S' zwei projectivische Büschel in perspectivischer Lage; es bestimmen also die Durchschnitte $SD \cdot S'D'$ und $SE \cdot S'E'$ eine Linie $g = SD \cdot S'D' \frown SE . S'E'$, auf welcher sich alle anderen homologen Strahlen der Büschel S und S' schneiden. Um dann zu einem Punkt X auf a, den zugehörigen X' auf b zu finden, ziehe man $SX = u$, welche g in einem Punkte schneidet, der mit S' verbunden die Linie $S'X' = u'$ liefert. $XX' = x$ ist dann eine sechste Tangente. Die Construction wird noch vereinfacht, wenn man $S = cd$, $S' = ce$ setzt. Die Gerade g wird jetzt die Verbindung von ae mit bd. — Betrachtet man das Dreiseit uxu' in seinen verschiedenen Lagen, so erhält man den Satz (vergl. pag. 184): Bewegt sich ein Dreieck so, dass zwei seiner Seiten durch feste Punkte gehen, und seine drei Ecken auf drei festen Geraden hingleiten, so umhüllt seine dritte Seite einen Kegelschnitt.

Betrachtet man ferner das umschriebene Sechsseit $dceaxb$, so hat man den Satz von Brianchon, der, obgleich dual zum Pascal'schen, erst etwa 150 Jahre nach diesem entdeckt wurde: Bei jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Sechsseite schneiden sich die Diagonalen, d. h. die Verbindungslinien gegenüberstehender Ecken in einem Punkte. Denn die Diagonalen sind:

$$dc \frown ax = u \quad ce \frown xb = u' \quad ea \frown bd = g$$

die zufolge der Construction durch einen Punkt gehen.

Es versteht sich, dass man alle am Pascal'schen Sechsecke gefundenen Eigenschaften, ohne Weiteres auf das Brianchon'sche Sechsseit übertragen kann, indem man nur die dort gefundenen Sätze so abändert, dass für Punkt — Gerade, für Gerade — Punkt gesetzt wird. —

Wir haben jetzt die erste Construction projectivischer Punktreihen aus ihren Bestimmungsstücken verfolgt; betrachten wir auch die zweite. Sind $C\,D\,E$, $C'D'E'$ die auf 2 Tangenten a, b gegebenen Punkte, so liegen auf einer Geraden g die Punkte:

$$CD \cdot DC', \quad CE' \cdot EC', \quad DE' \cdot ED'.$$

Diese Gerade g muss nach früheren Sätzen durch die dem Durchschnitte ab (oder B, A') entsprechenden Punkte, d. h. die Berührungspunkte des Kegelschnittes hindurchgehen. Fasst man nun etwa $DD'E'E$ als ein umschriebenes Viereck auf, so hat man den Satz: Bei jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Vierecke schneiden sich die Diagonalen in einem Punkte, welcher auf der Verbindungslinie zweier Berührungspunkte liegt. — Betrachten wir wiederum das vollständige Vierseit, welches von den 4 Tangenten, und das vollständige Viereck, welches von den 4 Berührungspunkten gebildet wird, so ergibt sich genau derselbe Satz, wie er bei dem dual entsprechenden Entwickelungsgange (pag. 197) erschien. Wir könnten also bereits von diesem Punkte aus die Identität der Curve zweiter Classe mit der Curve zweiter Ordnung erschliessen, doch wollen wir die Entwickelung noch um einen Schritt weiter führen, wodurch die Uebereinstimmung noch evidenter hervortreten wird.

Eine Curve 2ter Classe ist vollkommen bestimmt, wenn auf zwei Tangenten a, b drei Paare entsprechender Punkte gegeben sind. Dies kann entweder dadurch geschehen, dass drei weitere Tangenten c, d, e, oder dass nur 2 Tangenten c, d und der Berührungspunkt A auf a gegeben ist (denn dieser entspricht dem Durchschnitte $ab = A'$ auf b), oder endlich, dass nur noch eine Tangente c und die beiden Berührungspunkte A und B' auf den Tangenten a, b gegeben sind. Eine einfache Construction für den letzten Fall, bei welchem also 2 Tangenten mit ihren Berührungspunkten und eine dritte bekannt sind, folgt aus dem Brianchon'schen Satze, wenn wir in dem umschriebenen Sechsseite je zwei Tangenten zusammenfallen lassen, so dass es in der Form $aa\,bb\,cc$ geschrieben werden kann. Es schneiden sich nach dem allgemeinen Satze vom Sechsseite die Linien:

$$aa \frown bc, \quad ab \frown cc, \quad bb \frown ca$$

in einem Punkte. B e i j e d e m e i n e r C u r v e 2ter C l a s s e u m s c h r i e b e n e n D r e i e c k e s c h n e i d e n s i c h d i e V e r b i n d u n g s l i n i e n d e r E c k e n u n d d e r B e r ü h r u n g s p u n k t e g e g e n ü b e r l i e g e n d e r S e i t e n i n e i n e m P u n k t e.

Damit aber sind wir am Ende unserer dualen Entwickelung angelangt; denn dieselbe Construction, welche hier zur Bestimmung eines Punktes einer Curve 2. Classe gefunden wird, haben wir oben (pag. 199) für die Bestimmung eines Punktes der Curve 2. Ordnung kennen gelernt. Denken wir uns nun eine Curve 2. Classe, welche die Tangenten a, b, c und auf diesen die Berührungspunkte B, C hat, ferner eine Curve 2ter Ordnung, welche ebenfalls durch a, b, c und B, C bestimmt ist, dann fällt auch der Berührungspunkt A für beide Curven zusammen. Construiren wir jetzt eine vierte Tangente d der Curve 2. Classe und deren Berührungspunkt D, so bilden $abcd$ ein Vierseit, $ABCD$ ein Viereck, welche in der Beziehung zu einander stehen, dass die Diagonalen jenes in den Diagonalpunkten des letzteren sich schneiden. Es wird aber diese 4te Tangente d und deren Berührungspunkt D auch der durch a, b, c, B, C bestimmten Curve angehören. Jede Tangente der einen Curve fällt mit einer Tangente der anderen, und jeder Berührungspunkt auf einer Tangente mit dem zur anderen Curve gehörigen Berührungspunkte auf der nämlichen Tangente zusammen, d. h. beide Curven, welche durch dieselben Daten abc, BC bestimmt werden, sind identisch.

§. 10.

Kriterien für die Arten des Erzeugnisses zweier projectivischer Punktreihen.

Wie bei der Erzeugung des Kegelschnittes durch zwei projectivische Strahlbüschel, so werden wir auch bei der Erzeugung durch projectivische Punktreihen nach Kriterien suchen, vermittels welcher wir die verschiedenen Arten der Curven nach der gegenseitigen Lage der erzeugenden Grundgebilde unterscheiden können.

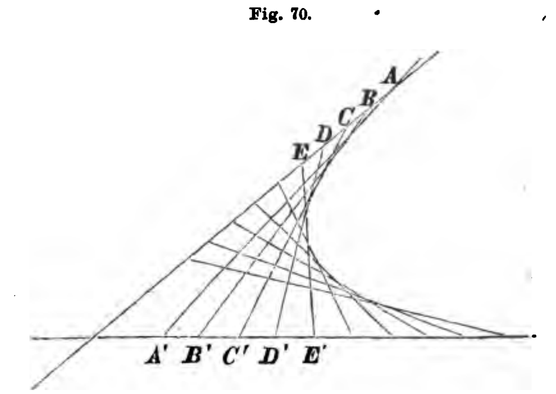
Eine Parabel ist dadurch charakterisirt, dass sie die unendlich ferne Gerade nicht in zwei verschiedenen Punkten schneidet, sondern in einem Punkte berührt; die unendlich ferne Gerade ist eine Tangente der Parabel. Durch zwei projectivische Punktreihen wird also eine Parabel erzeugt, sobald die unendlich fernen

Punkte beider Reihen einander zugeordnet sind, d. h. sobald die beiden Punktreihen projectivisch ähnlich (oder insbesondere projectivisch gleich) sind. Umgekehrt werden auch irgend zwei Tangenten einer Parabel von allen anderen in zwei projectivisch ähnlichen Punktreihen geschnitten. Sind demnach $A'B$ die Berührungspunkte zweier fester Tangenten, deren Durchschnitt mit (A, B') bezeichnet wird, und XX' ein Paar homologer Punkte auf a und b, so ist:

$$AX : XB = A'X' : X'B'$$

d. h. die Strecken AB, $A'B'$ werden von jeder Tangente in umgekehrtem Verhältnisse getheilt.*) (Durch Annahme aequidistanter Punkte $A\,B\,C\,D\ldots$ auf a, und Zuordnung aequidistanter $A'B'C'D'\ldots$ auf b erhält man leicht ein anschauliches Bild der Parabel, Fig. 70.) Da bei der Parabel

Fig. 70.



die unendlich ferne Gerade selber Tangente ist, so geht von jedem unendlich fernen Punkte der Ebene nur eine Tangente noch aus, welche die Parabel in einem endlichen Punkte tangirt. Alle im Endlichen gelegenen Tangenten der Parabel schneiden sich daher in Punkten, welche wiederum im Endlichen liegen, oder mit anderen Worten: Die Parabel hat keine zwei einander parallelen Tangenten. Liegen die projectivisch ähnlichen Punkt-

*) Diese schöne Eigenschaft der Parabel ist bereits von Halley entdeckt worden.

reihen zu einander perspectivisch, so zerfällt die Parabel in ein Punktpaar, dessen einer Punkt der Durchschnitt der beiden Punktreihen ist, dessen anderer im Unendlichen liegt.

Zwei beliebige projectivische Punktreihen, welche nicht ähnlich sind, können je nach der Lage homologer Punkte eine Ellipse oder Hyperbel (nie aber eine Parabel) erzeugen. Bei der Unterscheidung der Arten des Kegelschnittes als Erzeugnisses zweier projectivischer Strahlbüschel ergab sich das Kriterium der verschiedenen Fälle in naheliegender Weise, indem wir die Frage zu beantworten hatten, ob unter den beiden Strahlbüscheln homologe Elemente auftreten, welche einander parallel laufen. In der jetzt uns vorliegenden Untersuchung ist die Lösung der Frage keine so directe. Es ist dies von vornherein daraus ersichtlich, dass die Scheidung der Kegelschnitte in Ellipse, Parabel, Hyperbel wesentlich auf Eigenschaften beruht, die ihnen als Punktgebilde zukommen, indem man ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden betrachtet. Halten wir auch hier dieselbe Unterscheidung der Arten aufrecht, so müssen wir die Curve, obwohl sie sich zunächst als Tangentengebilde darstellt, doch wiederum als Punktgebilde untersuchen. (Eine der bisherigen dualistisch entsprechende Eintheilung des Kegelschnittes ist deshalb nicht möglich, weil unter den Punkten der Ebene kein einziger in gleicher Weise ausgezeichnet ist, wie unter den Geraden der Ebene die unendlich ferne. Streng genommen fasst die projectivische Geometrie die unendlich ferne Gerade überhaupt nicht als eine in besonderer Weise ausgezeichnete Linie und behandelt darum auch den Unterschied zwischen Ellipse und Hyperbel als einen unwesentlichen. Nur wenn wir Untersuchungen über nicht projectivisch metrische Verhältnisse machen, gewinnt die unendlich ferne Gerade und dann auch die Hyperbel und Ellipse eine eigenartige Bedeutung.) Die Curve 2. Classe ist eine Ellipse, wenn die Berührungspunkte auf allen ihren Tangenten im Endlichen sich befinden, eine Hyperbel, wenn es zwei Tangenten gibt, deren Berührungspunkte auf der unendlich fernen Geraden liegen. Wir werden nun suchen müssen,

wie sich diese Vorkommnisse aus der Lage der beiden projectivischen Punktreihen unmittelbar erkennen lassen.

Bezeichnen wir die Träger der beiden projectivischen Punktreihen wieder mit s und s', ferner den Punkt auf s, welcher dem auf s' gelegenen unendlich fernen entspricht, mit J, ebenso mit I' den Punkt, welcher dem unendlich fernen der Punktreihe s homolog ist, so werden die durch J und I' zu s' und s parallel gezogenen Linien (dieselben seien mit r' und r bezeichnet) Tangenten des Kegelschnittes sein. Es bilden also die Linien r, r', s, s' ein dem Kegelschnitt umschriebenes Parallelogramm. Da für s oder s' jede andere Tangente des Kegelschnittes zu Grunde gelegt werden kann, so ergibt sich der Satz, dass bei den Ellipsen und Hyperbeln immer je zwei Tangenten einander parallel laufen.

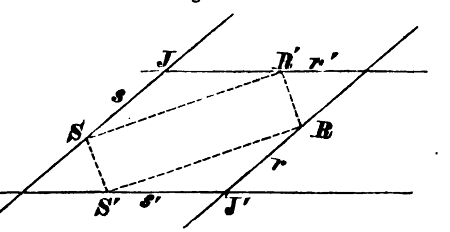
Der (pag. 197) gegebene allgemeine Satz vom umgeschriebenen Vierseite lässt sich nun, falls dieses ein Parallelogramm ist, so fassen: Die vier Berührungspunkte auf den Seiten eines einem Kegelschnitte umschriebenen Parallelogrammes bilden selber ein Parallelogramm, dessen Seiten den Diagonalen des ersteren parallel laufen und dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des umschriebenen Parallelogrammes zusammenfällt.

Wählen wir die Träger s, s' der erzeugenden Punktreihen einander parallel, so dass ihr Durchschnitt in's Unendliche fällt und bezeichnen mit J, I' die dem Durchschnitte, je nachdem wir denselben als Punkt auf s' oder s fassen, homologen Punkte, so ist die projectivische Beziehung festgelegt, sobald noch ein Paar homologer Punkte X, X' gegeben ist. Der Berührungspunkt auf dem nunmehr veränderlich gedachten Strahle XX' wird zufolge des Satzes vom um- und eingeschriebenen Dreiecke (pag. 199) so gefunden, dass man durch den Durchschnitt der Strahlen $X'J$ und XI' eine Parallele zu den Linien s, s' zieht; dieselbe schneidet dann auf XX' den zugehörigen Berührungspunkt aus, der also in Bezug auf die Punkte X und X' zum Durchschnittspunkte $XX' \cdot JI'$ harmonisch liegt. Der Berührungspunkt einer Tangente XX' liegt also

auf der unendlich fernen Geraden, wenn die Strecke XX' durch die Linie JI', und daher auch die Strecke JI' durch die Linie XX' halbirt wird. Sei M die Mitte von JI', so projicire man von M aus die Punktreihen s und s'. Besitzen diese beiden vereinigt gelegenen Strahlbüschel zwei reelle Doppelelemente, so bilden diese in der That zwei Strahlen XX' von der Eigenschaft, dass sie durch die Mitte JI' hindurchgehen; besitzen die Strahlbüschel keine reellen Doppelelemente, so gibt es keine reellen Linien XX', welche der geforderten Bedingung genügen. Reelle Doppelelemente aber treten, wie wir wissen, immer auf, sobald die beiden Strahlbüschel ungleichlaufend sind; damit dieses der Fall sei, müssen die Punktreihen s und s' gleichlaufend sein. Sind dagegen die Punktreihen s und s' ungleichlaufend, so werden die Strahlbüschel gleichlaufend; es könnten jetzt beide Fälle eintreten, sowohl dass die Doppelelemente reell, wie dass sie imaginär sind. Eine nähere Untersuchung zeigt uns indess, dass die Bedingung der Realität bei keiner Lage erfüllt ist, sobald wir die parallelen Punktreihen s und s' als ungleichlaufende annehmen. Denn bilden wir wiederum die beiden Strahlbüschel auf der einen Punktreihe z. B. s' ab, so erhalten wir jetzt auf s' zwei gleichstimmig gelegene Punktreihen, deren Fluchtpunkte I', J vereinigt liegen. Es besitzen also diese beiden Punktreihen, und mithin auch die beiden Strahlbüschel in M keine reellen Doppelelemente, d. h. es gibt keinen Strahl XX' durch die Mitte M. Demnach haben wir das Resultat erhalten: Zwei projectivische Punktreihen, deren Träger in paralleler Lage sich befinden, erzeugen eine Ellipse, wenn sie ungleichlaufend, eine Hyperbel, wenn sie gleichlaufend sind. Dieses Kriterium liefert nun auch ein neues für den Fall, dass die beiden Träger einander nicht parallel laufen. Bezeichnen S und S' die Berührungspunkte auf s und s', sei ferner J der Punkt, welcher auf s dem unendlich fernen, J' der Punkt, welcher auf s' dem unendlich fernen entspricht; dann ziehe man durch J die Linie $r' \parallel s'$, durch J' die Linie $r \parallel s$; die Berührungspunkte R, R' dieser Tangenten erhält man, indem man die Punkte S und S' mit der Mitte

des von s, s', r, r' gebildeten Parallelogrammes verbindet. Betrachtet man nun das Linienpaar $r's'$ als die den Kegelschnitt erzeugenden Punktreihen, und wendet auf diese das eben gefundene Kriterium an, so entspricht dem unendlich fernen Punkte von s' auf r' der Punkt R', umgekehrt dem unendlich fernen von r' auf s' der Punkt S'. Die Linien r und s verbinden je ein homologes Punktpaar. Die beiden Punktreihen auf r und s werden gleichstimmig gelegen sein, sobald die Punkte R' und S' ausserhalb des Parallelogrammes $s s' r r'$ liegen, dann liegen, da die Linien $S'S$, $R'R$ den Diagonalen des Parallelogrammes parallel laufen, auch R und S ausserhalb des Parallelogrammes; ungleichstimmig dagegen, wenn R' und S', also auch R und S innerhalb des Parallelogrammes fallen. Zwei projectivische Punktreihen in allgemeiner Lage erzeugen also eine Ellipse, wenn die Berührungspunkte ihrer Träger innerhalb der Strecken fallen, welche von dem Schnittpunkte ihrer Träger und den Durchschnittspunkten der zu diesen parallelen Tangenten gebildet werden, eine Hyperbel, wenn die Berührungspunkte ausserhalb dieser Strecken liegen.

Fig. 71.



Ein Grenzfall, welcher den Uebergang von der Ellipse zur Hyperbel und umgekehrt bildet, tritt dann ein, wenn die Berührungspunkte gerade in die Ecken des Parallelogrammes fallen. Derselbe vollzieht sich im allgemeinen nur so, dass der Durchschnittspunkt der beiden Träger ein sich selbst entsprechender Punkt wird; jede durch diesen Punkt gehende Linie stellt eine Verbindungslinie zweier einander entsprechender Punkte dar. Dann aber sind die Punktreihen in perspectivischer Lage, d. h. es gibt einen zweiten Punkt, durch welchen die Verbindungslinien homologer Punkte sämmtlich hindurchgehen. Wie bei der Curve 2. Ordnung ein Linienpaar, so tritt bei der Curve 2ter Classe ein

Punktpaar als specieller Fall auf. Die Strahlbüschel in diesen beiden Punkten bilden die Curve 2ter Classe; denn auch hierbei bleibt der Satz bestehen, dass von jedem Punkte der Ebene 2 Linien der Curve, nämlich die Verbindungslinien dieses Punktes mit dem Punktpaare hindurchgehen. (Betrachtet man eine Ellipse als Punktgebilde, und lässt sie, indem man die beiden Scheitel festhält, immer schmäler werden, so vereinigen sich ihre Tangenten immer dichter an den Scheiteln, bis sie, falls die Ellipse in die geradlinige Strecke zwischen den Scheiteln übergegangen ist, sich alle nur in dem einen oder anderen dieser Punkte schneiden. Das nämliche findet bei einer immer flacher werdenden Hyperbel statt, die sich schliesslich als Punktgebilde auf die beiden unbegrenzten Strecken ausserhalb der Scheitel zusammenzieht.)

Betrachtet man bei der Hyperbel die projectivischen Punktreihen auf denjenigen Tangenten, deren Berührungspunkte unendlich weit liegen, d. h. auf den Asymptoten, so entspricht dem Durchschnittspunkte O der beiden Linien jedesmal auf der anderen Linie der unendlich ferne Punkt. Die projectivische Beziehung zwischen den Punktreihen X und X' wird demnach durch die Gleichung $OX \, . \, OX' = q^2$ dargestellt, was den Satz ergibt: Jede Tangente der Hyperbel schliesst mit den Asymptoten ein Dreieck von constantem Inhalte ein. Sind die Asymptoten gegeben, so bedarf es nur noch einer weiteren Tangente, damit die Hyperbel bestimmt sei. Ist XX' die gegebene Tangente, so erhält man beliebig viele andere, indem man von den Punkten X und X', welche auf den Asymptoten ausgeschnitten werden, zwei parallele Linien in beliebiger Richtung zieht, die auf den Asymptoten die neuen Punkte Y' und Y ausschneiden. Die Linie YY' ist eine Tangente der Hyperbel, da $\triangle\, OXX' = \triangle\, OYY'$. Die Berührungspunkte von XX', YY' liegen immer in der Mitte dieser Strecken.

---

§. 11.

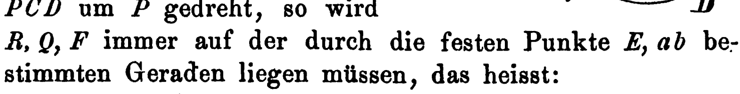
Pol und Polare am Kegelschnitte.

Zieht man von einem Punkte P in der Ebene eines Kegelschnittes zwei beliebige Secanten AB, CD, vervollständigt das Viereck $ABCD$, so dass

$$AB \cdot CD = P, \quad AD \cdot BC = Q, \quad AC \cdot BD = R$$

die drei Durchschnitte der Gegenseiten sind, so schneidet die Gerade $p = QR$ die beiden Secanten in Punkten E, F, welche zu P und den Durchschnitten mit dem Kegelschnitt harmonisch sind. Es geht ferner nach den Sätzen von dem eingeschriebenen Viereck die Gerade p durch den Durchschnitt der beiden in A, B an den Kegelschnitt gelegten Tangenten ab.

Fig. 72.



Wird nun die eine Secante PCD um P gedreht, so wird R, Q, F immer auf der durch die festen Punkte E, ab bestimmten Geraden liegen müssen, das heisst:

Dreht sich eine Gerade um einen festen Punkt P, so bewegt sich der vierte harmonische Punkt zu dem Drehungspunkt und ihren beiden Durchschnitten mit dem Kegelschnitt auf einer Geraden p. Diese wird, wenn P ausserhalb des Kegelschnittes liegt, den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten schneiden, welche zugleich die Berührungspunkte der von P an den Kegelschnitt gelegten Tangenten sind. Sie wird den Kegelschnitt nicht schneiden, wenn P innerhalb des Kegelschnittes liegt. Sie wird endlich in die Tangente in P übergehen, wenn P auf dem Kegelschnitte liegt.

Diese Beziehung von p zu P drücken wir dadurch aus, dass wir p die Polare von P nennen.

Um zu P die Polare p zu construiren, legen wir durch P zwei Secanten, welche den Kegelschnitt in AB, CD schneiden, dann ist:

$$AC \cdot BD \frown AD \cdot BC = p.$$

Man sieht: Bei einem, einem Kegelschnitte eingeschriebenen vollständigen Vierecke ist jede Verbindungslinie der Durchschnitte der Gegenseiten die Polare des anderen Durchschnitts. (P Polare von RQ, Q Polare von PR, R Polare von QP.)

Wir betrachten jetzt die duale Figur. Es sei p eine Gerade; wir nehmen auf ihr zwei beliebige Punkte an, ziehen von diesen die Tangenten ab, cd, so erhält man ein dem Kegelschnitt umschriebenes Vierseit, dessen eine Diagonale $p = ab \frown cd$. Die beiden anderen Diagonalen

$$q = ad \frown bc, \qquad r = ac \frown bd$$

schneiden sich in einem Punkte qr, nach denen von den Ecken ab, cd des Vierseits Gerade e, f gezogen werden mögen; dann sind $abpe$ und $cdpf$ harmonische Büschel. Der Punkt qr liegt, wie aus dem Satze vom Vierecke am Kegelschnitte folgt, auf der Geraden AB, welche die Berührungspunkte von ab verbindet.

Halten wir nun a, b fest, während wir c, d auf der Geraden p gleiten lassen, so wird f, q, r sich immerfort verändern; die Gerade e aber, welche von ab nach qr geht, wird immer der zu abp conjugirte 4. harmonische Strahl bleiben, also sich nicht in seiner Lage verändern; ebenso bleibt die Gerade AB immer dieselbe und da $qr = e \cdot AB$ ist, so schneiden sich die veränderlichen Diagonalen qr immer in demselben Punkte P, durch welchen auch immer der zu cdp conjugirte 4te harmonische Strahl geht.

Gleitet demnach der Durchschnitt zweier Tangenten eines Kegelschnittes auf einer Geraden p, so wird der 4te harmonische Strahl zu p und den beiden Tangenten immer durch einen festen Punkt P gehen.

Diese Beziehung wird so ausgedrückt: P ist der Pol der Geraden p.

Um diesen Pol P einer Geraden p zu construiren, legen wir von zwei Punkten der Linie p Tangenten ab, cd an den Kegelschnitt, dann ist:

$$P = ac \frown bd \cdot ad \frown bc.$$

Bei einem, einem Kegelschnitte umschriebenen Vierseite ist je ein Durchschnitt zweier Diagonalen der Pol der dritten Diagonale.

Da nun, wenn man in den Berührungspunkten $ABCD$ von $abcd$ dem Kegelschnitt ein Viereck einbeschreibt, die Durchschnitte P, Q, R der Diagonalen p, q, r mit den Durchschnitten der Gegenseiten zusammenfallen, so ist P sowohl der Pol der Geraden p, als auch nach obigem p die Polare zu P. Pol und Polare sind demnach ganz reciproke Begriffe. Wenn P der Pol einer Geraden p ist, so ist auch umgekehrt p die Polare zu P; und es sind durch diese Begriffe ein Punkt und eine Gerade in eine bestimmte, gegenseitige Beziehung gebracht. Die Durchschnitte der Gegenseiten eines eingeschriebenen Vierecks (oder die Diagonalen eines umgeschriebenen Vierseits) bilden hienach eine eigenthümliche Gruppe, einen Tripel conjugirter Punkte; jede Ecke ist der Pol der Gegenseite, jede Seite die Polare der Gegenecke. Es besitzen diese Tripel eine grosse Zahl schöner Eigenschaften.

Denken wir uns nun einen Pol P und seine Polare p gegeben, legen durch P eine Gerade AB, lassen sich dagegen CD um P drehen, so beschreiben beide Durchschnitte der Gegenseiten Q, R die Gerade p, und zwar in projectivischen Punktreihen. Denn es ist die Punktreihe R perspectivisch zu dem Büschel AC und die Punktreihe Q zu dem Büschel BC. Diese beiden Büschel mit den festen Punkten A, B als Mittelpunkten sind aber, da sich C auf einem Kegelschnitte bewegt, projectivisch.

Nun aber ist $PR = q$ die Polare von Q und das Büschel der q im Punkte P ist projectivisch der Punktreihe Q. Daher erhält man hieraus, je nachdem man sich Q oder q als das erst Bewegliche denkt, folgende zwei reciproke, zugleich duale und logisch inverse Sätze:

Die Polaren q aller Punkte Q einer Geraden p gehen durch einen Punkt P, den Pol jener Geraden und bilden dort ein Büschel, welches zu der durch Q beschriebenen Punktreihe projectivisch ist.

Die Pole Q aller durch einen Punkt P gehenden Geraden q liegen auf einer Geraden p, der Polaren

des Punktes P und bilden dort eine Punktreihe, welche zu dem Strahlenbüschel q projectivisch ist. *)

Wir haben oben eine Construction der Polaren eines gegebenen Punktes kennen gelernt, welche immer direct ausführbar ist, wenn der Kegelschnitt punktweise gezeichnet vorliegt; ebenso eine Construction des Poles einer gegebenen Geraden, wenn die sämmtlichen Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind. Will man bei einem durch seine Punkte gegebenen Kegelschnitte den Pol P einer gegebenen Geraden p bestimmen, so bedient man sich vorstehenden Satzes: Man sucht die Polaren zweier beliebigen Punkte der gegebenen Geraden, deren Durchschnitt dann P bestimmt. Umgekehrt, will man die Polare p eines gegebenen Punktes P bestimmen, wenn der Kegelschnitt durch Tangenten gegeben ist, so legt man durch P zwei beliebige Gerade, bestimmt deren Pole, und es gibt deren Verbindungslinie die gesuchte p.

So haben wir denn systematischer und eleganter als es früher im Abschnitte II. geschehen konnte, diese Theorie der Pole und Polare begründet, auf welche die geometrische Transformation einer Figur in ihre polarreciproke gebaut werden kann; und zwar stehen die beiden so auseinander hervorgehenden Figuren in einer allgemeineren Verwandtschaft, als wenn man sie durch einen Kreis als Basis gewinnt. Nimmt man die reciproken Gebilde am Kegelschnitte, so erhält man eine projectivische Figur zu jener.

Da einer Punktreihe ein zu ihr projectivischer Büschel entspricht, und umgekehrt, so ist die polar reciproke Figur eines Kegelschnittes wiederum ein Kegelschnitt, ein Satz, der auch so ausgesprochen werden kann. Bewegt sich in der Ebene eines Kegelschnittes ein Punkt

*) Man mag bemerken, dass die durch P gehenden Geraden AB, CD die Pole von ab, cd sind; dass ferner, da die Polare eines ausserhalb liegenden Punktes seine Berührungssehne ist, die Tangenten z. B. von R und Q an den Kegelschnitt je auf den Geraden r und q den Kegelschnitt berühren.

auf einem anderen Kegelschnitte, so umhüllt die Polare dieses Punktes in Bezug auf den ersten einen dritten Kegelschnitt.

§. 12.

Die Durchmesser und der Mittelpunkt. Einzelne Eigenschaften am Kegelschnitte.

Lässt man einen Punkt P in's Unendliche rücken, so werden die durch ihn gelegten Secanten parallel, ihre Mitten die zu P zugeordneten harmonischen Punkte liegen auf einer Geraden p der Polaren von P. Hierin ist der Satz ausgesprochen: Die Mitten paralleler Sehnen eines Kegelschnittes liegen auf einer Geraden. Eine solche Gerade heisst ein Durchmesser des Kegelschnittes. Nach dem Satze vom umschriebenen Vierseit kann man sogleich hinzufügen, dass die in den Endpunkten eines Durchmessers construirten Tangenten den Sehnen parallel sind, welche der Durchmesser halbirt, und dass die in den Durchschnitten einer Sehne an den Kegelschnitt gelegten Tangenten sich auf dem Durchmesser schneiden.

Alle unendlich entfernten Punkte P liegen auf einer Geraden, die Polaren aller dieser Punkte, d. h. die Durchmesser des Kegelschnittes schneiden sich demnach in einem Punkte, dem Pole der unendlich entfernten Geraden; dieser Punkt, von dem sämmtliche Durchmesser halbirt werden, ist der Mittelpunkt des Kegelschnitts. Da für die Parabel die unendlich ferne Gerade selbst eine Tangente der Curve ist, so liegt der Pol derselben auch auf dieser Linie, d. h. der Mittelpunkt der Parabel fällt in's Unendliche; die Durchmesser der Parabel sind parallel. Ist q der Durchmesser, dessen parallele Sehnen von p halbirt werden, so liegt der unendlich entfernte Pol von p auf q, und daher der Pol von q auf p. Da nun aber q ein Durchmesser ist, so liegt sein Pol Q unendlich entfernt, aber immer auf p; es werden daher alle durch Q gehenden (d. h. zu p parallelen) Geraden von dem Durchmesser q halbirt. Das ist der Satz: Halbirt ein Durchmesser p die zu einem anderen q parallelen Seh-

nen, so halbirt auch q die zu p parallelen Sehnen. Man nennt zwei solche Durchmesser conjugirt.

Zwei von den Scheiteln A, B eines Durchmessers nach irgend einem dritten Punkte C eines Kegelschnittes gezogene Geraden AC, CB sind zweien conjugirten Durchmessern parallel. Denn man verbinde den Mittelpunkt M des Kegelschnittes mit den Mitten D, E von AC, BC. Dann ist MD der Durchmesser, welcher zur Richtung der Sehnen AC gehört, und ME der Durchmesser, welcher zu BC gehört. Es ist aber $MD \parallel BC$, $ME \parallel AC$, also MD der Durchmesser, welcher die zum Durchmesser ME parallelen Sehnen halbirt, d. h. der conjugirte.

Wie man nach vorstehenden Sätzen die Aufgabe löst: Den Mittelpunkt eines gezeichneten Kegelschnittes zu finden, zwei conjugirte Durchmesser zu construiren, leuchtet ein. Der letzte Satz gibt die Mittel an die Hand, um zwei conjugirte Durchmesser, welche einen gegebenen Winkel einschliessen, zu finden. Man construirt nämlich über einen Durchmesser AB einen Kreis, welcher jenen gegebenen Winkel enthält; der Durchschnitt C mit dem Kegelschnitte liefert mit A und B verbunden die verlangten Richtungen. Beschreibt man über dem Durchmesser AB einen Halbkreis, so findet man zwei conjugirte Durchmesser, welche auf einander senkrecht stehen, die Axen des Kegelschnittes, die man hienach in jedem Falle construiren kann.

Sind $ABCD$ vier Punkte eines Kegelschnittes, so ist das Doppelverhältniss $(AA, AB, AC, AD) = (BA, BB, BC, BD)$, wo AA, BB die Tangenten in diesen Punkten bedeuten. Also ist auch, wenn wir die Strahlbüschel durch die Linie CD schneiden, und

$$AA \cdot CD = E \quad BB \cdot CD = F \quad AB \cdot CD = G$$

setzen: $(CDGE) = (CDFG)$ oder:

$$\frac{CG}{GD} : \frac{CE}{EG} = \frac{CF}{FD} : \frac{CG}{DG} \qquad \left(\frac{CG}{GD}\right)^2 = \frac{CF}{DF} \cdot \frac{CE}{EG}.$$

Es werde nun AB ein Durchmesser, also $AE \parallel BF$, ferner ziehe man durch C und D Parallele zu dieser Richtung, also $CH \parallel ID \parallel AE \parallel BF$, wo H und I die Schnittpunkte auf AB, so hat man:

$$CG : DG = HC : ID \qquad EC : ED = AH : AI$$
$$CF : DF = HB : IB$$

und daher nach der vorigen Gleichung:

$$\overline{HC}^2 : \overline{ID}^2 = AH \,.\, HB : AI \,.\, IB$$

d. h. die Quadrate paralleler Sehnen sind proportional den Producten aus den Abschnitten, welche sie auf dem conjugirten Durchmesser bilden. Es ist daher

$$\overline{HC}^2 = q \,.\, AH \,.\, HB$$

wo q eine gewisse Constante, den Parameter bezeichnet. Aus dieser Gleichung, welche Apollonius als die Fundamentaleigenschaft der Kegelschnitte betrachtet, und welche der analytischen Gleichung der Curve 2. Ordnung entspricht, kann man zu jeder Abscisse die Ordinate construiren.

Sind $ABCD$ vier feste Punkte eines Kegelschnittes, O ein fünfter beweglicher, so ist

$$O(ABCD) = \frac{\sin AOC}{\sin COB} : \frac{\sin AOD}{\sin DOB} = \text{const.},$$

also auch

$$\frac{OA \,.\, OC \sin AOC}{OB \,.\, OC \sin BOC} : \frac{OA \,.\, OD \sin AOD}{OB \,.\, OD \sin BOD} = \text{const.}$$

Demnach hat man für die Flächen der Dreiecke die Gleichung:

$$\frac{\triangle AOC}{\triangle COB} : \frac{\triangle AOD}{\triangle DOB} = \text{const.}$$

oder wenn p, q, r, s die 4 Perpendikel von O auf die 4 Seiten AC, CB, AD, BD des Viereckes $ACBD$ bedeuten,

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = C' \quad \text{oder} \quad \frac{ps}{qr} = C'$$

d. h. Wenn man von einem beliebigen Punkte eines Kegelschnittes Perpendikel auf die Seiten eines eingeschriebenen Viereckes fällt, so steht das Product der auf zwei Gegenseiten gefällten Perpendikel zu dem Product der auf die beiden anderen Seiten gefällten Perpendikel in einem und demselben Verhältnisse, wo man auch jenen Punkt auf dem Kegelschnitte annehmen möge.

Dreht sich um einen Punkt S ein constanter Winkel, ein anderer ebenfalls constanter um S' und bewegt sich der Durchschnitt zweier Schenkel auf einer festen Geraden, so

durchläuft der Durchschnitt der beiden anderen Schenkel einen Kegelschnitt, welcher durch S und S' geht. Denn die zwei sich immer auf der festen Geraden schneidenden Strahlen durchlaufen collineare Büschel und da die anderen beiden Strahlen immer unter constantem Winkel zu diesen gezogen sind, so sind auch die von diesen durchlaufenen Büschel projectivisch auf einander bezogen. Dies ist Newtons berühmte organische Beschreibung der Kegelschnitte.

Dual hiezu ist die andere: Bewegt sich ein Viereck mit zwei an Länge constanten Seiten so, dass diese auf 2 festen Geraden gleiten und die dritte Seite sich um einen festen Punkt dreht, so hüllt die vierte Seite einen Kegelschnitt ein. —

Schneidet man ein einem Kegelschnitte eingeschriebenes Viereck durch eine Transversale, so bilden zwei Paare gegenüberliegender Seiten mit den Durchschnitten auf dem Kegelschnitt ein involutorisches System. Sei $ABCD$ das Viereck, die Durchschnitte von AB, CD mit der Transversalen seien R, R' die von AD und BC, SS', die mit dem Kegelschnitte PP', so sind P, R, S involutorisch zu $P'R'S'$, d. h. es muss

$$(RSPP') = (R'S'P'P) \text{ oder } (PRSS') = (P'R'S'S).$$

Um dieses nachzuweisen, projicire man die Linie $AB \cdot CD - AD \cdot BC$ in's Unendliche, so dass dabei der Kegelschnitt ein Kreis wird. Dabei wird das eingeschriebene Viereck ein Rechteck. Zufolge der Eigenschaften der Secanten ist:

$$RP . RP' = RA . RB \qquad R'P . R'P' = R'C . R'D$$
$$SP . SP' = SA . SD \qquad S'P . S'P' = S'C . S'B$$

und daher

$$\frac{RP . RP'}{R'P . R'P'} = \frac{RA . RB}{R'C . R'D}.$$

Nun ist $RA : R'C = RS : R'S' \quad RB : R'D = RS' : R'S$

daher
$$\frac{RP . RP'}{R'P . R'P'} = \frac{RS . RS'}{R'S\, R'S'}$$

und dies ist die nachzuweisende involutorische Relation.

Es ist übrigens ohne weiteres klar, dass auch das dritte Paar gegenüberliegender Seiten die Transversale in

Punkten schneidet, welche mit den sechs schon betrachteten ebenfalls in Involution stehen. Diesem berühmten Satze von Desargues kann man noch eine andere Form geben, in welcher seine grosse Wichtigkeit heller an's Licht kommen wird. Da die Durchschnitte PP' irgend eines Kegelschnittes mit den festen Punkten R, R'; S, S' eine Involution bilden, so werden sämmtliche durch die 4 festen Punkte $ABCD$ gehenden Kegelschnitte auf irgend welcher Transversalen stets eine involutorische Punktreihe bilden. Derselbe Satz lässt sich in überraschend einfacher Weise auch so darthun. Alle durch die 4 Punkte gehenden Kegelschnitte bilden zusammen einen Büschel von Kegelschnitten, welcher die ganze Ebene erfüllt. Durch jeden Punkt der Ebene geht ein und nur ein Kegelschnitt desselben. Irgend eine Transversale wird von den Kegelschnitten in allen Punkten geschnitten; von diesen Punkten sind stets zwei conjugirt, wenn man damit die Lage auf demselben Kegelschnitte bezeichnet. Zu jedem Punkte gehört ein und nur ein anderer conjugirter oder entsprechender. Es liegen also auf einer Transversalen zwei collineare Punktreihen und zwar liegen sie involutorisch; denn es entspricht jedem Punkte ein anderer, dem er umgekehrt wieder entspricht; mit anderen Worten, welcher von beiden Punktreihen man auch einen Punkt zuzählt, immer entspricht ihm derselbe andere Punkt. Das ist aber die charakteristische Eigenschaft involutorischer Punktreihen. Es müssen also 2 Punkte (reelle oder imaginäre) vorhanden sein, welche als Doppelelemente der Punktreihen sich selber entsprechen. In diesem Punkte kann der zugehörige Kegelschnitt die Transversale nicht schneiden, sonst entspräche ihm ja ein anderer, sondern muss dieselbe berühren. Wir erhalten so den Satz: In dem Büschel von unendlich vielen Kegelschnitten, welche durch die nämlichen vier Punkte gehen, befinden sich immer zwei, welche eine gegebene Gerade berühren. Zu den beiden Berührungspunkten dieser Kegelschnitte liegen die Schnittpunkte der Geraden mit jedem anderen Kegelschnitte des Büschels harmonisch.

Siebenter Abschnitt.

Die Collineation ebener Systeme.

§. 1.

Die Staudt'sche Begründung der projectivischen Beziehung.

Die geometrischen Sätze, die wir im Vorstehenden kennen gelernt haben, sind zum grössten Theile von der Art, dass sie sich auf die Durchschnitte von Geraden in einem Punkte beziehen oder von der Lage verschiedener Punkte auf einer Geraden, und von projectivischen Beziehungen von Geraden und Strahlbüscheln zu einander handeln; alles dies aber sind Sätze, welche die Anwendung irgend eines Maassverhältnisses nicht nöthig machen. Wenn nun trotzdem die Beweise so gegeben sind, dass sie mit Hilfe metrischer Relationen, wenn auch nur der projectivischen, geführt wurden, so unterliegt es doch keinem Zweifel, dass es möglich sein muss, alle diese Sätze ohne jede Anwendung von Maassverhältnissen und der auf ihr beruhenden Rechnung abzuleiten. In der That hat v. Staudt diese Möglichkeit in seiner schönen, wenn auch vielleicht etwas einseitig gehaltenen „Geometrie der Lage“ nachgewiesen. Da sich seine Methode besonders dazu eignet, die allgemeinen Sätze über die collinearen ebenen Systeme zu begründen, so kann ich mir nicht versagen, hiervon wenigstens einen Abriss zu geben.

Den Ausgangspunkt bildet der Satz:

Wenn zwei auf einander bezogene Dreiecke ABC, $A'B'C'$ in zwei Ebenen liegen, und sich je zwei homologe Seiten (selbstverständlich in dem gemeinschaftlichen Durchschnitt s beider Ebenen) derselben schneiden, so sind beide Dreiecke Schnitte einer dreiseitigen Ecke.

In der That wird man durch AB, $A'B'$ eine Ebene legen können, durch BC, $B'C'$ ebenfalls und ebenso durch CA, $C'A'$. Diese 3 aber bilden zusammen jene Ecke.

Sind $ABCD$, $A'B'C'D'$ zwei aufeinander bezogene Vierecke in zwei Ebenen und schneiden sich AB, $A'B'$, ferner CD, $C'D'$, ferner BC, $B'C'$, ferner AD, $A'D'$, endlich BD, $B'D'$, also 5 entsprechende Seitenpaare, so können diese Vierecke angesehen werden als Schnitte eines Vierkantes.

Denn man kann, wenn F der Durchschnittspunkt von AD und BC ist, FBD, $F'B'D'$ als Schnitte eines Dreikantes ansehen, ebenso ABD, $A'B'D'$; beide zusammen bilden aber ein Vierkant. AC, $A'C'$ schneiden sich dann, weil sie in einer Ebene liegen, welche durch die Ecken des Vierkantes geht.

Zwei in einer Ebene liegende n Ecke ABC.., $A'B'C'$.. heissen perspectivisch liegend, wenn sie die Projectionen eines dritten ebenen n Eckes $A''B''C''$.. aus zwei Punkten $S_1 S_2$ sind. Dann werden sich AB, $A''B''$, welche in einer Ebene $S_1 A''B''$ liegen, schneiden und zwar auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen ABC.. $A''B''C''$. In demselben Punkte muss sich $A'B'$ mit $A''B''$, also auch AB mit $A'B'$ schneiden und es liegen daher sämmtliche Durchschnitte entsprechender Seiten auf der Durchschnittslinie beider Ebenen, der Spur der Ebene $A''B''C''$. Wir werden diese Gerade die Projectionsaxe nennen. In der perspectivischen Lage werden ferner AA' in der Ebene $S_1 S_2 A''$ projicirt, BB' in $S_1 S_2 B''$.. und man sieht, dass sich alle Verbindungslinien entsprechender Punkte AA', BB'.. in einem Punkte S, dem Projectionscentrum schneiden müssen, welches der Durchschnitt der Geraden $S_1 S_2$ mit der Grundebene, die Spur dieser Geraden ist.

Man kann nach diesen Festsetzungen leicht den Satz beweisen: Wenn bei zwei in einer Ebene liegenden Dreiecken die drei Punkte, in welchen sich entsprechende Seiten schneiden, in einer Geraden liegen, so sind die Dreiecke perspectivisch.

Es seien die Dreiecke ABC, $A'B'C'$, deren entsprechende Seiten sich in s schneiden. Man nehme in einer durch s gehenden Ebene ein Dreieck $A_0 B_0 C_0$ so an, dass seine Seiten durch jene 3 Punkte auf s gehen. Dann kann nach den früheren Bemerkungen sowohl ABC wie $A'B'C'$ als mit $A_0 B_0 C_0$ auf einer dreiseitigen Ecke liegend angesehen werden, d. h. ABC, $A'B'C'$ sind perspectivisch und nach den

letzten Sätzen erhalten wir auf diese Weise den Satz von Desargues:

Schneiden sich die entsprechenden Seiten zweier in einer Ebene liegenden Dreiecke ABC, $A'B'C'$ in dreien Punkten

$$AB \cdot A'B' \qquad BC \cdot B'C' \qquad CA \cdot C'A'$$

welche auf einer Geraden s liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken

$$AA' \qquad BB' \qquad CC'$$

in einem Punkte S.

Schneiden sich die entsprechenden Seiten dreier Dreiecke $A'B'C'$, $A''B''C''$, $A'''B'''C'''$ in denselben 3 Punkten, welche in gerader Linie s liegen, so haben $A'B'C'$, $A''B''C''$ den Projectionspunkt S''', $A''B''C''$, $A'''B'''C'''$ den Punkt S' und $A'''B'''C'''$, $A'B'C'$ den Punkt S'', welche alle 3 in gerader Linie liegen. Nimmt man nämlich in einer Ebene, welche durch s geht, ein Dreieck $A_0B_0C_0$ beliebig so an, dass seine Seiten durch jene 3 Punkte auf s gehen, so können die gegebenen Dreiecke mit $A_0B_0C_0$ als Schnitte von Dreiseiten angesehen werden, und es werden so 3 Dreikante erhalten werden, deren Spitzen $S_1S_2S_3$ sein mögen. Es ist S''' die Spur von S_1S_2, S' die von S_2S_3, S'' die von S_3S_1. Alle diese 3 Spuren liegen aber in der Spur der Ebene $S_1S_2S_3$, also in einer Geraden.

Indem man den in Bezug auf die Vierkante gegebenen Satz benutzt, findet man:

Wenn sich 5 Seiten zweier in einer Ebene liegenden Vierecke in 5 Punkten einer Geraden schneiden, so liegen sie perspectivisch. Es werden sich also auch die sechsten Seiten auf einem Punkte derselben Geraden schneiden, und die Verbindungslinien entsprechender Ecken werden durch einen Punkt gehen.

Zu den vorstehenden Sätzen gehört eine Reihe dualer, welche auf dem Satze beruhen:

Wenn sich die entsprechenden Kanten zweier Dreikante schneiden, so haben beide ein Dreieck gemein, welches nämlich die 3 Schnittpunkte als Ecken enthält.

Wenn sich 5 Kanten zweier Vierflache (d. h. solcher

Figuren, welche entstehen, wenn man alle Verbindungslinien eines festen Punktes und der Seiten eines Vierseits zusammenfasst) resp. schneiden, so enthalten beide Vierflache dasselbe Vierseit, und es werden sich daher auch ihre entsprechenden sechsten Kanten in einem Punkte schneiden.

Denn schneiden sich, wenn $ABCDEF$, $A'B'C'D'E'F$ die 6 Ecken zweier solcher Vierseite sind (wir denken uns dabei $BC \cdot DE = A$, $BD \cdot CE = F$), SA, $S'A'$ in A_0, SB, $S'B'$ in B_0, .. SE, $S'E'$ in E_0, so liegen SA, SB, SC in einer, $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ in einer anderen Ebene, also $A_0B_0C_0$ in dem Durchschnitte dieser beiden Ebenen, d. h. auf einer Geraden; ebenso liegen $A_0D_0E_0$ in einer Geraden, welche sich in A_0 mit der früheren schneidet, also in einer Ebene mit ihr liegt. Es bilden also $A_0B_0C_0D_0E_0$ die 5 Ecken eines Vierseits, die sechste Ecke F_0 wird der Durchschnitt von SF und $S'F'$ sein. Denn SF liegt in dem Durchschnitt der Ebenen SBD, SCE; $S'F'$ in dem von $S'B'D'$ und $S'C'E'$. Es schneiden sich aber SBD, $S'B'D'$ in $B_0D_0F_0$, SCE, $S'C'E'$ in $C_0E_0F_0$, also haben SBD, SCE, $S'B'D'$, $S'C'E'$ einen Punkt F_0 gemein.

Wenn sich die Verbindungslinien der Ecken zweier in einer Ebene liegenden Dreiecke ABC, $A'B'C'$ in einem Punkte O schneiden, so liegen sie perspectivisch.

Man projicire das Dreieck ABC von S, $A'B'C'$ von S' aus, wobei diese zwei Punkte mit O auf einer Geraden liegen, so haben diese beiden Dreikante ein Dreieck $A_0B_0C_0$ gemein, da SA, $S'A'$ in der Ebene $SOS'AA'$ liegend, sich schneiden, ebenso SB, $S'B'$ und SC, $S'C'$. Nach dem obigen Satze sind daher ABC, $A'B'C'$ Projectionen desselben Dreiecks $A_0B_0C_0$ und liegen daher perspectivisch. Zieht man hieraus noch die weitere Folgerung, dass $AB \cdot A'B'$, $BC \cdot B'C'$, $CA \cdot C'A'$ auf einer Geraden liegen, so erhält man einen Satz, welcher zugleich das duale Gegenbild des Satzes von Desargues ist. Die weitere Folgerung aus diesem und die Umkehr eines oben bewiesenen Satzes bildet dann der folgende: Wenn die entsprechenden Ecken dreier Dreiecke ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ auf denselben 3 sich in einem Punkte O schneidenden Geraden liegen, so liegen die Durchschnitte der entsprechenden Seiten der paarweise combi-

nirten Dreiecke auf 3 Axen, die sich in einem Punkte schneiden.

Als vier harmonische Punkte $ABC'C''$ definirt v. Staudt solche, über welche ein Vierseit so beschrieben werden kann, dass je zwei Seiten desselben durch C', C'' gehen und A, B die Durchschnitte zweier Diagonalen sind. Es versteht sich hienach von selbst, dass, wenn $ABC'C''$ harmonische Punkte sind, dies auch $BAC'C''$, $ABC''C'$, $BAC''C'$ sind. Aus dem zuletzt behandelten Satze ergibt sich ferner, dass man jederzeit über den 4 Punkten auch ein Vierseit construiren kann, dessen Seiten sich zu je zweien in A, B schneiden, und dessen Diagonalen durch C', C'' gehen. Es sind also auch $C'C''AB$, $C''C'AB$, $C'C''AB$, $C''C'BA$ harmonische Punkte. Bei dem Begriff der harmonischen Lage sind also nur die beiden Paare AB und $C'C''$ von einander zu unterscheiden; die Reihenfolge derselben wie die der Punkte in den einzelnen Paaren ist gleichgiltig. Die Punkte A und B sind durch C', C'' und ebenso die Punkte C' und C'' durch A, B harmonisch getrennte.

Vier harmonische Punkte behalten bei der Projection auf eine andere Gerade diese Eigenschaft. Dies ist unmittelbar klar, wenn man sich mit den 4 Punkten zugleich das betreffende Vierseit verbunden in irgend einer Ebene denkt und letzteres mit den Punkten gleichzeitig projicirt. Staudt's Definition der Projectivität ist nun die: Zwei Punktreihen heissen projectivisch, wenn jedem Punkte der einen ein Punkt der anderen und umgekehrt so entspricht, dass je vier harmonischen Punkten der einen wieder vier harmonische Punkte der anderen zugeordnet sind. Dass diese Definition, wie wir aus unseren früheren Untersuchungen wissen, mehr, als nothwendig ist, enthält, thut ihrer Brauchbarkeit keinen Eintrag. Denn dass jene Bedingungen recht wohl neben einander bestehen können, beweist die Existenz projectivischer Punktreihen, wie sie sich durch Projection ergeben. Dass aber alle projectivischen Punktreihen durch Projection aus einander hergeleitet werden können, kann mit Hilfe des folgenden Satzes erwiesen werden:

Wenn zwei projectivische Punktreihen drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie alle entsprechenden Elemente gemein.

Fallen nämlich auf einer Geraden die drei Punkte A, B, C mit den ihnen entsprechenden A', B', C' zusammen, so construire man einen vierten Punkt D, welcher von einem der Punkte durch die beiden anderen harmonisch getrennt ist. Dieser muss alsdann, da zufolge des Satzes vom Vierseit zu drei Punkten immer nur ein vierter möglich ist, welcher von einem der drei durch die beiden anderen harmonisch getrennt liegt, mit seinem entsprechenden D' zusammenfallen. Der Punkt D liefert mit zwei der früheren wiederum einen neuen Punkt, und wir erhalten auf diese Weise unendlich viele entsprechende Punkte der beiden Punktreihen, die immer zusammenfallen. Diese sich selbst entsprechenden Punkte müssen eine stetige Reihe bilden. Denn läge zwischen den Punkten RS, welche bezüglich mit ihren entsprechenden $R'S'$ zusammenfallen, kein sich selbst entsprechender Punkt, so könnte auch ausserhalb derselben kein sich selbst entsprechender Punkt liegen, was aber zu einem Widerspruche mit unserer Construction unendlich vieler entsprechender Punkte führt. Auf diese Weise gewinnen wir den Satz, dass durch drei entsprechende Punktpaare und nur durch drei die projectivische Beziehung festgelegt ist, und dass projectivische Gebilde auf demselben Träger, wenn sie nicht identisch zusammenfallen, höchstens zwei Elemente gemein haben.

Was man nun unter projectivischen Strahlbüscheln und ihrer Beziehung zu Punktreihen zu verstehen hat, bedarf keiner Bemerkung. Es gilt zufolge des eben bewiesenen Satzes die Beziehung: Wenn eine Punktreihe und ein Büschel projectivisch auf einander bezogen sind und drei entsprechende Elemente in einander liegen, so ist die erstere ein Schnitt des letzteren. Daraus aber folgt, dass zwei projectivische Punktreihen stets als Schnitte eines und desselben Büschels angesehen werden können, welchen man erhält, indem man die Geraden in solche Lage bringt, dass sie sich in zwei entsprechenden Punkten A, A' schneiden.

Dann gibt der Durchschnitt von BB', CC' die Spitze des Büschels.

§. 2.

Der Begriff der geometrischen Verwandtschaft, insbesondere der Identität und Aehnlichkeit.

Durch Möbius ist im Jahre 1827 (vrgl. Einleit. pag. 24) in seinem barycentrischen Calcul zuerst von einer Vorstellung Gebrauch gemacht worden, die man heutzutage als eine solche betrachten kann, auf die sich in ihrer Allgemeinheit und Zweckmässigkeit die ganze neuere Geometrie gründet. Es ist dies die der Verwandtschaft von Figuren.

Verwandt, correlativ heissen zwei Figuren dann, wenn einem Elemente der einen ein Element der anderen nach einem gewissen Gesetze entspricht. Die Bedeutung, welche dem Ausdrucke „entsprechen“ zukommt, wird vielleicht am deutlichsten durch das Beispiel von verwandten Figuren gegeben, welche man erhalten würde, wenn man dasselbe räumliche, durchsichtige Object von den verschiedensten Standpunkten aus abzeichnete; alle diese Zeichnungen wären dann verwandt. Einer Geraden des Modells würden dann immer wieder Gerade entsprechen. Denkt man sich aber z. B. auch eine Zeichnung entworfen, während man durch ein alles verzerrendes Glas sähe, so würde man jetzt eine verwandte Figur erhalten, in der Curven an Stelle von Geraden getreten wären. Einem Fünfeck z. B. wird jedes andere Fünfeck correlat sein können; denn jeder Ecke, jedem Winkel, jeder Seite, Diagonale und allen an der einen Figur erscheinenden Elementen wird ein Element an der anderen entsprechen. Anstatt aber nur einzelne Figuren in dieser Verwandtschaft zu betrachten, kann man auch z. B. von zwei Geraden sagen, dass sie in Verwandtschaft stehen, wenn zu allen Punkten der einen nach einem gewissen Gesetze Punkte auf der anderen Geraden construirt sind. So kann man ferner von zwei ganzen Ebenen reden, die mit einander verwandt sind. Das beste Beispiel hiefür liefern die Landkarten. Mag die Oberfläche der Erde nach Mercator's Projection dargestellt werden, in welcher Meridiane

und Breitenkreise Gerade sind, oder in der Polarprojection, in der die Meridiane Gerade, die Breitenkreise Kreise sind, oder in der stereographischen Aequatorealprojection, in der beide Linien Kreise geben, oder in einer der übrigen mannigfaltigen Projectionen, immer werden sich alle Punkte der einen Darstellung auf jeder anderen, freilich in immer veränderten Configurationen wiederfinden.

Ebenso erhält man zwei räumliche, verwandte Figuren, wenn man sich eine Wassermasse zunächst in Ruhe denkt, dann in Bewegung gesetzt. Jedes Wassermolekül, welches wir im Ruhezustande vorfinden, wird auch im bewegten Wasser noch vorhanden sein, nur in anderer Form und anderer Lage. Die Hydrodynamik hat ausschliesslich die Aufgabe, diese Verwandtschaft des bewegten und ruhigen Wassers zu ermitteln, d. h. das Gesetz festzustellen, nach dem vermöge der mechanischen Bedingungen, ein Wassermolekül seine Lage und Figur verändert.

Alle die erwähnten Verwandtschaften sind solche zwischen gleichartigen, homologen Elementen; einem Punkte entsprach wieder ein Punkt, einer Curve wieder eine solche, einem Wassermolekül ebenfalls ein solches.*) Man kann aber die Verwandtschaft noch weiter ausdehnen. In der ebenen Zeichnung eines räumlichen Gegenstandes z. B. entspricht eine Linie einer Fläche, ein Punkt oft einer Linie. Ja man kann noch weiter gehend sich solche Verwandtschaften denken, in denen z. B. ein Punkt, eine Gerade der einen Figur einer Geraden, einem Punkte der anderen entspricht; in diesem Falle nennt man die Verwandtschaft eine reciproke.

Betrachten wir zuerst die einfachsten aller Verwandt-

*) Man wird selbstverständlicher Weise von einer eigentlichen Verwandtschaft nur reden können, wenn die Beziehung nach einem gewissen Gesetze stattfindet und definirbar ist. Eine vollständig regellose oder willkürliche Beziehung, wie sie z. B. ein Gebäude mit seinen Trümmern hat, in welchen früher zusammenhängende Theile nach Zufall verstreut sind, wird dem Begriffe der Verwandtschaft nicht entsprechen. Mit anderen Worten: Dieser Begriff setzt voraus, dass im Allgemeinen die Theile, welche in der einen Figur einen stetigen Zusammenhang haben, diesen auch in der correlaten Figur besitzen.

schaften, die der Identität oder Gleichheit und der Aehnlichkeit.

Wenn in zwei Figuren jedem Punkte der einen Figur ein Punkt der anderen entspricht, dergestalt, dass der gegenseitige Abstand je zweier Punkte der einen Figur dem gegenseitigen Abstande der entsprechenden Punkte in der anderen Figur gleich ist, so heissen die Figuren identisch (congruent).

Der einfachste Fall der Identität ist der zweier Geraden. Sie heissen identisch, wenn den Punkten $A_0, A_1, A_2 \ldots$ auf der einen die Punkte $A_0' A_1' A_2' \ldots$, auf der anderen so entsprechen, dass die entsprechenden Distanzen einander sämmtlich gleich sind. Die Möglichkeit solcher Geraden ist evident; zwei Maassstäbe, nach demselben Grundmaasse gefertigt, sind die Darstellung hievon. Wir haben bereits diese Beziehung zwischen den Punktreihen eine „projectivisch gleiche" genannt.

Legt man beide Gerade auf einander, so dass $A_0 A_1$ nach derselben Richtung als $A_0' A_1'$ liegen, so fallen entweder alle entsprechenden Punktpaare zusammen, oder gar keines, welch letzteren Fall man durch Verschiebung in der Richtung der Geraden erhält. Genauer wird man im letzteren Falle sagen müssen, dass sich die unendlich entfernten identischen Punkte decken.

Liegen beide Gerade dagegen so aufeinander, dass der Sinn von $A_0 A_1$ der entgegengesetzte von $A_0' A_1'$ ist, so coincidirt nur ein Punkt der einen mit einem der anderen. Ist nämlich M die Mitte von $A_0 A_0'$ oder $A_1 A_1'$ oder $A_2 A_2' \ldots$, was offenbar überall dasselbe besagen will, so ist $A_0 M = -A_0' M$, also M ein sich selbst entsprechender Punkt.

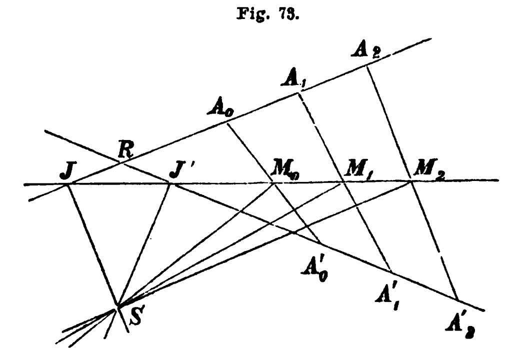
Liegen beide Gerade parallel und gleichgerichtet, so sind $A_0 A_0'$, $A_1 A_1' \ldots$ parallel, d. h. schneiden sich in einem unendlich entfernten Punkte. Sind sie entgegengesetzt gerichtet, so schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte in einem zwischen beiden Geraden liegenden Punkte.

Wenn die Geraden sich schneiden in einem Punkte, der sich selbst entspricht, so also, dass in ihm etwa A_0, A_0' zusammenfallen, so sind wieder $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$ parallel.

Wenn aber der Durchschnitt R der Geraden kein selbstentsprechender Punkt ist, so gibt es in der Ebene einen Punkt S, von welchem die entsprechenden Punkte gleichen Abstand haben.

Es ist klar, dass ein solcher Punkt auf den Geraden liegen muss, welche $A_0 A_0'$ und $A_1 A_1'$ rechtwinklig halbiren; von diesem Durchschnitte stehen A_0, A_0' und A_1, A_1' resp. gleich weit ab. Es fragt sich aber, ob nun auch die $A_2 A_2' \ldots$ rechtwinklig halbirenden Linien durch denselben Punkt gehen. Dies ist in der That leicht nachzuweisen. Halbiren wir den äusseren Winkel beider Geraden in R und bezeichnen den Durchschnitt dieser Winkelhalbirungslinien mit der $A_0 A_0'$ senkrecht halbirenden Geraden mit S, fällen dann von S Senkrechte SJ und SJ' auf die gegebenen Ge-

Fig. 73.



raden, so ist $\triangle SJA_0 \cong \triangle SJ'A_0'$, da $SJ = SJ'$, $SA_0 = SA_0'$, also auch, da $A_0'A_1' = A_0 A_1$ und $JA_0 = J'A_0'$ ist, $JA_1 = J'A_1'$ und daher $SA_1 = SA_1'$, ebenso $SA_2 = SA_2'$. Es schneiden sich daher alle diese Geraden in einem Punkte, dem Situations- oder Identitätspunkte. Die Punkte JJ' entsprechen sich; die durch sie hindurchgehende Gerade halbirt alle Strecken $A_0 A_0'$, $A_1 A_1' \ldots$ in M_0, $M_1 \ldots$ denn es ist, da die Identitätsaxe JJ' mit beiden Geraden dieselben Winkel macht, der Abstand des A_0 und A_0' von JJ' gleich, also liegt M_0 auf JJ', ebenso M_1 u. s. w.

Von dem Situationspunkte aus gesehen, erscheinen entsprechende Strecken $A_0 A_1$, $A_0' A_1'$ gleich gross; denn es ist: $\sphericalangle A_0 S A_1 = \sphericalangle A_0' S A_1'$. Da ferner $\sphericalangle A_0 S A_1 + \sphericalangle A_1 S A_0' =$

$\sphericalangle A_1 S A_0' + \sphericalangle A_0' S A_1'$ und somit auch $\sphericalangle A_0 S A_0' = \sphericalangle A_1 S A_1'$, so erscheinen auch die Verbindungslinien entsprechender Punkte $A_0 A_0'$, $A_1 A_1'$ von S alle unter gleichen Winkeln.

Man hat aus Vorstehendem den Satz: Alle Dreiecke $A_0 R A_0'$, $A_1 R A_1'$, welche einen Winkel (bei R) gemeinschaftlich haben und in denen die Differenz der beiden anliegenden Seiten constant ist, haben die Mitten der Grundlinien auf einer Geraden.

Da $A_0 S A_0'$ = const. = JSJ', dieser Winkel aber gleich dem Winkel $A_0 R A_0'$ ist, so ist $\sphericalangle A_0 P A_0' = \sphericalangle A_0 R A_0'$ und es liegen somit $R S A_0 A_0'$ auf einem Kreise. Ebenso $R S A_1 A_1'$ u. s. w. Dies kann man auch so aussprechen. Die Kreise, welche den zuvor betrachteten Dreiecken $R A_0 A_0'$, $R A_1 A_1' \ldots$ umschrieben sind, gehen sämmtlich durch einen Punkt S.

Gemäss unseren früheren Untersuchungen können wir hier noch anmerken, dass die Geraden $A_0 A_0'$, $A_1 A_1' \ldots$ eine Parabel umhüllen, deren Brennpunkt S und deren Axe RS ist; ihre Scheiteltangente ist JJ'.

Identische, ebene Figuren können in einer Ebene gleichsinnige oder entgegengesetzte Lage haben, je nachdem ABC, $A'B'C'$ in den beiden Figuren die eine oder die andere Lage haben.

Es werden zunächst die Fälle betrachtet zweier einstimmigen Systeme $ABCD$, $A'B'C'D'$. Dieselben besitzen stets einen Punkt S von solcher Lage, dass $SABC \ldots \cong SA'B'C'$, d. h. zwei entsprechende Punkte fallen in S, dem Identitätspunkte zusammen und es ist klar, dass das eine System durch eine blosse Drehung um diesen Punkt in seiner Ebene zum Zusammenfallen mit dem anderen gebracht werden kann. Es ist einleuchtend, dass dieser Punkt S erhalten wird, indem man irgend zwei entsprechende Punktpaare AA', BB' mit einander verbindet und in deren Mittelpunkten Senkrechte errichtet; alle solche Senkrechte werden sich in diesem einzigen Punkte schneiden.

Es lassen sich von diesem schönen Satze eine Reihe interessanter Anwendungen machen: Jede Bewegung eines Systems in seiner Ebene kann im Resultate ersetzt werden durch eine Drehung um einen einzigen Punkt. Bei jeder

unendlich kleinen Bewegung eines Systems bleibt ein Punkt desselben in Ruhe, um den sich also alle Punkte des Systems in einem unendlich kleinen Kreisbogen drehen, und den man finden kann, indem man auf den unendlich kleinen Bögen, welche irgend zwei Punkte des Systems beschreiben, Senkrechte errichtet. Wird die Bewegung des Systemes nach irgend einer Regel fortgesetzt, so beschreibt jeder Punkt eine stetige Curve, deren Normale in jedem Momente durch den bei der Bewegung momentan unveränderlichen Punkt, das instantane Drehungscentrum hindurchgeht. So erhalten wir ein bewundernswürdig einfaches Mittel, um die Normalen, wie dies Descartes auf ähnliche Weise schon vornahm, an allen Curven zu bestimmen, welche durch eine mechanische stetige Bewegung eines starren Systemes erzeugt werden können.

Ich will hiefür einige Beispiele der bekanntesten Curven folgen lassen: Bekanntlich beschreibt ein fester Punkt P einer der Länge nach gegebenen Strecke AB eine Ellipse, wenn sich diese in einem Winkel so bewegt, dass AB stets dessen Schenkel berühren. Die Bahn des Punktes A ist, wenn wir von einer gewissen Lage ausgehen, der Schenkel CA, die des Punktes B der Schenkel CB; errichtet man daher in A und B Senkrechte auf CA, CB, so gibt deren Durchschnitt das Rotationscentrum R, und verbindet man dies mit P, so erhält man ohne Weiteres die Normale. Daraus ergibt sich die wohl einfachste Construction der Normale.

Fig. 74.

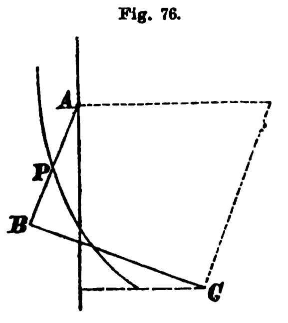
Fig. 75.

Die Conchoide des Nikomedes entsteht bekanntlich, indem sich ein Punkt P einer Geraden CP, die immer durch den festen Punkt C

den Pol, geht, und eine feste Gerade, die Directrix, in dem beweglichen Punkte *A* schneidet, sich so bewegt, dass *AP* constant ist. Man hat nun auf dem augenblicklichen Radiusvector *CP* und auf der Directrix in *A* eine Senkrechte zu errichten; der Durchschnitt dieser beiden gibt einen Punkt der Normalen in *P*.

Die Cissoide des Diokles kann nach Newton auf folgende Art beschrieben werden. Ein rechter Winkel *ABC*, dessen Schenkel *AB* von constanter Länge ist, bewegt sich so, dass *A* immer auf einer Geraden gleitet und der Schenkel *CB* immer durch den festen Punkt *C* geht, der von der Geraden um die Strecke $= AB$ absteht. Dann beschreibt der Halbirungspunkt *P* von *AB* die Cissoide. Die Normale geht durch den Durchschnitt der in *A* auf der Directrix und in *C* auf *CB* errichteten Senkrechten.

Fig. 76.



Ebenso einfach ist es, hienach die Normale an einer Fusspunktcurve zu construiren, wenn man den Pol derselben angeben kann. Eine Fusspunktcurve ist bekanntlich der Ort des Fusspunktes *P* des Perpendikels, welches von einem festen Punkte *C*, dem Pole, auf die Tangente an einer Leitlinie gefällt wird. Man braucht nur in dem Berührungspunkte *Q* der zu *P* gehörigen Tangente eine Parallele mit dem Radiusvector zu ziehen und in *C* auf *PC* eine Senkrechte zu errichten; der Durchschnitt derselben gibt sofort die Normale.

Identische Systeme entgegengesetzten Sinnes haben eine selbstentsprechende Richtung, d. h. zwei entsprechende Gerade fallen zusammen, ohne dass die auf ihnen befindlichen Figuren zusammenfallen, die vielmehr gegen einander verschoben sind; diese Gerade, die Identitätsaxe findet man, indem man die, zwei entsprechenden Geraden zugehörige Identitätsaxe construirt, die mit ihnen entgegengesetzt gleiche Winkel macht, und daher gegen alle anderen Geraden der Systeme ebenfalls entgegengesetzte Lage hat. Durch eine Verschiebung der einen Figur nach der Iden-

titätsaxe kann sie in symmetrische Lage mit der anderen gebracht werden.

Aehnlich heissen zwei Figuren $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$, wenn $C, D\ldots$ mit AB Dreiecke bilden, welche denen ähnlich sind, die $C', D'\ldots$ mit $A'B'$ bilden. Dass dann auch alle Winkel in beiden Figuren einander gleich, alle Dreiecke daher ähnlich und alle Strecken in demselben constanten Verhältnisse stehen, ist evident.

Liegen zwei ähnliche Linearfiguren $ABCD\ldots A'B'C'D'\ldots$ auf einer Geraden, so gibt es einen Punkt E derselben, welcher sich selbst entspricht, ein Doppelpunkt ist. Man findet ihn, wenn man in zwei entsprechenden Punkten A, A' Parallelen zieht, und auf diesen Strecken abträgt, welche sich auch dem Zeichen nach verhalten wie $AB : A'B'$; die Verbindungslinie der Endpunkte derselben schneidet die Gerade in dem Doppelpunkte E; denn es ist $AE : A'E = AB : A'B'$.

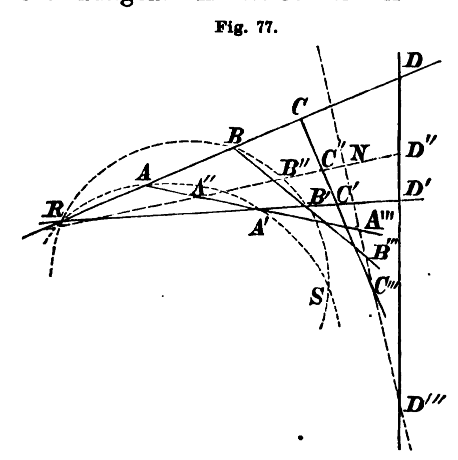
Schneiden sich zwei ähnliche Gerade in einem sich selbst entsprechenden Punkte, so sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte parallel. Sind beide Gerade parallel, so schneiden sich die Verbindungslinien in einem endlich entfernten Punkte.

Liegen zwei ähnliche Linearfiguren auf zwei Geraden, ohne dass ihr Durchschnitt R ein selbstentsprechender Punkt ist, so gibt es in ihrer Ebene einen Punkt S, den Aehnlichkeitspunkt, mit dem die entsprechenden Strecken AB, $A'B'$ ähnliche Dreiecke SAB, $S'A'B'$ bilden. Es wird dieser Punkt gefunden, indem man durch $AA'R$, $BB'R$ Kreise legt, welche sich zum zweitenmale in S schneiden. Denn es ist der Winkel $SAR = SA'R$ also $SAB = SA'B'$; ebenso $SBA = SB'A'$, also sind die Dreiecke ABS, $A'B'S$ gleichsinnig ähnlich. Ebenso werden BCS, $B'C'S$ ebenfalls ähnlich, da die Winkel $SBC = SB'C'$, $SCB = SC'B'$.

Verbindet man AA', $BB'\ldots$ und theilt diese Linien innen und aussen nach dem betreffenden Verhältnisse in $A''A'''\ldots$, $B'', B'''\ldots$, so liegen $A''B''\ldots$, ebenso wie $A'''B'''\ldots$ auf zwei Geraden, welche parallel den Geraden sind, die den Winkel von AB, $A'B'$ halbiren.

Um dies zu erweisen, bedenke man zunächst, dass die Winkel $A'SA$, $B'SB\ldots$ durch SA'', $SB''\ldots$ sowie durch SA''', $SB'''\ldots$ innen und aussen halbirt werden. Es ist nun $ASA' = BSB' = CSC'\ldots$ Denn man hat $ASB = A'SB'$, und findet durch beiderseitige Addition die angezeigten Gleichungen. Es ist ferner $SA : SB = SA' : SB'$, also sind die Dreiecke ASA', BSB' einander ähnlich. Ebenso werden die Dreiecke ähnlich bleiben, welche man aus diesen erhält, indem man die Winkelhalbirungslinie construirt, nämlich $A'SA''$, $B'SB''$. Da nun $A'S : B'S = A''S : B''S$ und die Winkel $A'SB' = A''SB''$, so sind $SA'B'$, $SA''B''$ einstimmig ähnlich.

Fig. 77.



Ebenso $SA'C'$ und $SA''C''$; da nun $SA'B' = SA''B''$, $SA'C' = SA''C''$ aber $SA'C' = SA'B'$, so hat man $SA''C'' = SA'B''$; d. h. C'' liegt mit $A''B''$ auf einer Geraden. Dasselbe kann nun entsprechend von $A'''B'''\ldots$ nachgewiesen werden. Man bemerkt, dass S gleichzeitig der Aehnlichkeitspunkt der Systeme AB, $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ ist und zwar derjenige, von dem aus sie gleichsinnig erscheinen. Dass $A''B''$, $A'''B'''$ den Winkel von AB, $A'B'$ halbiren, folgt daraus, dass der Kreis $A'A''S$ auch durch $A'B' \cdot A''B''$ geht und daher $A'SA''$ gleich dem Winkel zwischen $A'B'$, $A''B''$ ist; da ersterer aber $= \frac{1}{2} A'SA$, so ist die Behauptung erwiesen.

Durch eine Drehung in der Ebene um den Aehnlichkeitspunkt S können die beiden Linearfiguren in eine ähnliche Lage gebracht werden.

Neben dem einstimmigen Aehnlichkeitspunkte S kann auch noch ein ungleichstimmiger N angegeben werden, welcher der Durchschnitt jener beiden Geraden $A''B''$, $A'''B'''$, der Aehnlichkeitsaxen ist. Der Theilungsverhältnisse

$AA'A''A'''$ und des rechten Winkels bei N wegen halbirt $A''N$ den Winkel ANA' und es ist somit:

$$AN : A'N = AA'' : A'A'' = AB : A'B'.$$

Ebenso verhalten sich $BN : B'N$ und es ist daher ANB und $A'NB'$ entgegengesetzt ähnlich.

Klappt man $A'B'A''B''$ um $A''B''$ im Raume herum, so wird die resultirende Lage von $A'B'$ parallel mit AB und gleichgerichtet. N ist bei dieser ähnlichen Lage ein äusserer Aehnlichkeitspunkt, und es heisst $A''B''$ die einstimmige Aehnlichkeitsaxe. Dreht man $A'B'$ um die ungleichstimmige Axe $A'''B'''$ im Raume herum, so kommen AB, $A'B'$ ebenfalls in perspectivische Lage mit dem inneren Aehnlichkeitspunkte N.

Aehnliche Figuren in einer Ebene haben also einen gemeinschaftlichen Punkt S, wenn sie einerlei Sinnes sind.

Liegen sie entgegengesetzt, so haben sie einen gemeinschaftlichen Punkt N, gegen welchen sie entgegengesetzt ähnlich liegen und zwei durch diesen gehende, aufeinander senkrechte Gerade, welche sich selbst entsprechen; die eine enthält gleichstimmige, die andere entgegengesetzte Linearfiguren.

§. 3.

Die Verwandtschaft der Collineation.

Unter zwei projectivischen (collinearen) Punktreihen verstanden wir solche, welche die Eigenschaft besitzen, in eine Lage gebracht werden zu können, dass sie als Schnitte eines und desselben Büschels erscheinen. Die Spitze des Büschels bezeichnen wir dann als das Centrum der Collineation. Diese Art der Verwandtschaft wollen wir nun sowohl auf ebene Figuren wie auf ganze Ebenen und räumliche Strahlensysteme ausdehnen.

Collinear heissen nach Möbius zwei ebene Figuren, wenn einem Punkte oder einer Geraden des einen Systemes ein Punkt oder eine Gerade des anderen und umgekehrt entspricht, so dass dreien Punkten in einer Geraden, wieder drei Punkte in einer Geraden, und dreien Geraden durch einen Punkt, wieder drei Gerade durch einen Punkt u.s.w.

zugeordnet sind. Man erkennt hieraus sofort die wesentlichste Eigenschaft collinear-verwandter Gebilde, nach welcher jedem Büschel stets ein projectivischer, jeder Punktreihe eine projectivische entspricht. Es folgt dies einmal aus unserer früheren Definition der Projectivität, welche nur die Eindeutigkeit verlangt, andererseits aber auch aus der v. Staudt'schen, insofern vier harmonischen Punkten immer vier ebensolche entsprechen müssen, indem sie durch die Construction von Vierseiten erhalten werden, die rein lineal ist und also in beiden Figuren in gleicher Weise von 3 entsprechenden Punkten zu einem vierten, entsprechenden und mit jenen harmonischen führt.

Zwei ebene Systeme, d. h. die Systeme aller in zwei Ebenen enthaltenen Punkte, Geraden und Figuren überhaupt heissen projectivisch nach Steiner (homographisch nach Chasles), wenn sie perspectivische Abbilder eines und desselben Systemes sind, also so beschaffen, dass sie in eine Lage gebracht werden können, bei welcher die Verbindungslinien aller entsprechenden Punkte, die Projectionsstrahlen, durch die Punkte des Systemes, von welchem sie beide Abbilder sind, gehen und sich sämmtlich in einem Punkte, dem Projectionscentrum schneiden. Die Projectionsstrahlen bilden ein System von Linien, welches man einen Strahlenbündel nennt und man kann daher auch definiren:

Projectivisch heissen zwei ebene Systeme, wenn sie als Schnitte eines und desselben Strahlenbündels angesehen werden können. Befinden sie sich in dieser Lage, so sagt man, sie liegen perspectivisch. Es schneiden sich dann alle entsprechenden Geraden beider Systeme auf der Durchschnittslinie beider Ebenen, der Projectionsaxe. Denn zwei entsprechende Gerade liegen in einer zum Strahlenbündel gehörigen Ebene und diese hat einen Punkt mit beiden Ebenen gemein. Es ist klar, dass projectivische Systeme die Eigenschaft haben, dass jedem Punkte der einen ein Punkt der anderen und jeder Geraden wieder eine Gerade eindeutig entspricht, dass ferner das Doppelverhältniss von vier auf einer Geraden liegenden Punkten (von vier durch einen Punkt gehenden Geraden)

dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden Punkte (Geraden) gleich ist; kurz dass zwei projectivische Systeme auch collinear sind, unterliegt keinem Zweifel. Ob aber zwei collineare Systeme immer als projectivische angesehen werden dürfen, muss besonders untersucht werden. Zunächst bemerkt man den Satz: Schneiden sich alle entsprechenden Geraden zweier collinearer Ebenen in einer Geraden, so sind die Systeme projectivisch und liegen perspectivisch; denn durch zwei entsprechende Gerade geht eine Ebene; es schneiden sich also die Projectionsstrahlen entsprechender Punkte und müssen daher alle in einem Punkte zusammenkommen.

Projectivisch heissen zwei räumliche Strahlenbündel, wenn man sie so legen kann, dass die Durchschnitte entsprechender Strahlen ein ebenes System bilden. Diese Lage heisst die perspectivische, die Ebene ihre Projectionsebene; beide Bündel haben dann einen Ebenenbüschel mit einander gemein, dessen Axe die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte ist.

Collinear heissen zwei räumliche Strahlenbündel, wenn jedem Strahle des einen ein Strahl des anderen eindeutig entspricht und je dreien in einer Ebene liegenden Strahlen 3 ebenfalls in einer Ebene gelegene entsprechen. Dass projectivische Bündel collinear sind, liegt hienach auf der Hand; es fragt sich aber wiederum, ob auch das umgekehrte behauptet werden kann.

Haben aber zwei collineare Strahlenbündel den Ebenenbüschel entsprechend gemein, dessen Axe die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte ist, so sind sie projectivisch und liegen perspectivisch. Denn zwei entsprechende Strahlen schneiden sich, da sie in einer Ebene liegen, also schneiden sich auch irgend zwei von den Geraden, in denen sich entsprechende Ebenen schneiden; es liegen also sämmtliche Durchschnitte entsprechender Strahlen in einer Ebene.

Projicirt man ein ebenes System aus zwei Punkten auf eine und dieselbe andere Ebene, so erhält man auf dieser zwei projectivische, perspectivisch liegende (nach Poncelet homologe) Figuren, welche eine Gerade (Axe der Homologie) und ein Strahlenbüschel gemein haben. Dass sie die

angegebenen Elemente gemein haben, ist sofort klar, indem man den Durchschnittspunkt der Verbindungslinie der beiden Projectionscentren mit der Projectionsebene und die Durchschnittslinie der beiden Ebenen betrachtet; dass sie projectivisch sind, d. h. perspectivisch gelegt werden können, sieht man folgendermaassen: Man drehe nämlich das eine System, welches dem anderen jedenfalls collinear ist, um jene gemeinschaftliche Gerade, so werden nach einem früheren Satze alle Verbindungslinien entsprechender Punkte sich in einem Punkte schneiden.

Projicirt man zwei ebene Systeme, welche Schnitte eines und desselben Strahlenbündels sind, aus einem und demselben anderen Punkte, so erhält man zwei perspectivische Strahlenbündel, welche den Mittelpunkt, eine Ebene und einen Ebenenbüschel gemein haben.

Haben zwei collineare Systeme in einer Ebene eine Gerade gemein, so haben sie auch einen Strahlbüschel gemein und umgekehrt.

Projicirt man nämlich das eine System auf eine durch jene Gerade gehende Ebene, so ist es dem anderen collinear und hat mit ihm eine Gerade gemein, liegt daher mit ihm perspectivisch. Es sind also beide in der gegebenen Ebene liegende Systeme die Projectionen eines dritten und nach vorstehendem Satze haben sie daher einen Strahlenbüschel gemein.

Haben zwei ebene collineare Figuren, sie mögen in einer Ebene liegen, oder nicht, drei auf einer Geraden liegende Punkte gemein, so sind sie projectivisch und liegen perspectivisch.

Denn wenn 3 entsprechende Punkte zweier collinearen Geraden zusammenfallen, so fallen diese Geraden nebst ihren Punktreihen ganz zusammen; die beiden Systeme haben daher eine Projectionsaxe und liegen somit perspectivisch.

Wenn zwei collineare ebene Figuren, die in einer Ebene liegen, 3 sich in einem Punkte schneidende Geraden gemein haben, so sind sie projectivisch und liegen perspectivisch.

Denn dann fallen die Büschel, welche in jenem Punkte

ihre Spitze haben, in beiden Figuren zusammen, und die Figuren haben somit eine Projectionsaxe. Dreht man die eine derselben um diese Axe, so befinden sie sich in perspectivischer Lage, und sind daher ohne Zweifel projectivisch.

Wenn zwei collineare ebene Systeme ein Paar sich entsprechender Vierecke besitzen, die congruent sind, so sind sie vollständig congruent.

In der That: In jedem Durchschnitt gegenüberliegender Seiten oder auch Eckpunkt des gegebenen Vierecks concurriren 3 Strahlen, welche der Voraussetzung nach zu entsprechenden Strahlenbüscheln gehören, und gegen einander respective dieselbe Lage haben, wie ihre entsprechenden. Es sind daher die Büschel im Ganzen den entsprechenden congruent und somit auch irgend andere entsprechende Figuren in den Ebenen, da sie durch das Durchschneiden dieser identischen Büschel erzeugt werden können.

Liegen also zwei collineare ebene Systeme in einer Ebene und haben sie mehr als 3 Punkte mit einander gemein, oder mehr als 3 Gerade, so fallen sie ganz zusammen. Dabei ist jedoch der Fall ausgeschlossen, dass die 3 Punkte in einer Geraden liegen, oder die 3 Gerade sich in einem Punkte schneiden, in welchem Falle man nur schliessen darf, dass die Figuren perspectivisch liegen.

Zwei ebene collineare Systeme, welche in einer Ebene liegen, haben, wenn sie nicht perspectivisch liegen, immer ein Dreieck, d. h. drei Punkte und die sie verbindenden Geraden mit einander gemein.

Beweis: Man betrachte den Kegelschnitt s, welcher von zwei entsprechenden und daher collinearen Strahlenbüscheln um P, P' gebildet wird; ausserdem einen anderen t, welchen die entsprechenden Strahlenbüschel um Q, Q' mit einander bilden; dann schneiden sich s und t in 4 Punkten, von denen der eine der Durchschnitt von PQ, $P'Q'$ ist; denn dies sind jedenfalls zwei entsprechende Strahlen, welche sowohl zu dem einen als zu dem anderen Büschel gehören. Die 3 anderen Punkte A, B, C sind aber gemeinschaftliche Punkte beider ebenen Systeme; denn es sind der Construction nach PA, $P'A$ entsprechende Strahlen ebenso wie QA,

$Q'A$; es bilden also PQA und $P'Q'A$ zwei einander entsprechende Dreiecke.

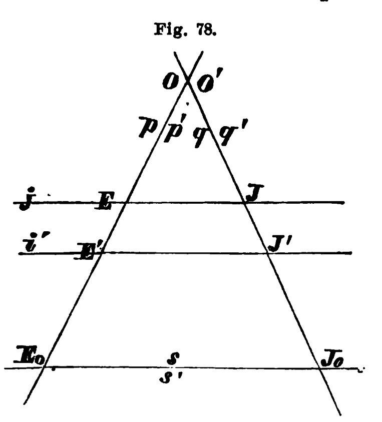
Es sind somit A, B, C die Doppelpunkte des Systemes; dass es nicht mehr geben kann, folgt aus dem vorigen Satze. Da nur eine gerade Anzahl von Durchschnittspunkten zweier Kegelschnitte imaginär werden kann, der Durchschnitt von PQ, $P'Q'$ aber stets reell bleibt, so ist einer von den Doppelpunkten immer reell, die beiden anderen aber können reell oder imaginär sein.

Den unendlich fernen Punkten in der einen Ebene entspricht in der anderen eine Gerade, die Gegenaxe (nach Magnus) oder Fluchtlinie, welche im allgemeinen Falle in endlicher Entfernung liegt. Liegen zwei ebene projectivische Systeme perspectivisch, so sind beide Gegenaxen der Projectionsaxe parallel, und da auf dieser alle gemeinschaftlichen Punkte beider Systeme liegen, so entsprechen sich die unendlich entfernten Punkte beider Gegenaxen. Bei jeder Projection sind die durch die Gegenaxen gelegten Ebenen parallel den gegebenen; schneidet man sie also durch eine auf ihnen senkrechte Ebene, welche durch das Projectionscentrum geht, so werden ihre drei Durchschnitte mit den Gegenaxen und der Projectionsaxe zusammen mit dem Mittelpunkte der Projection ein Parallelogramm bilden. Betrachtet man den Fall der in eine Ebene zusammenfallenden perspectivischen Systeme, so ist also bei ihnen das Projectionscentrum von den Gegenaxen ebensoweit entfernt, als letztere in umgekehrter Ordnung von der Projectionsaxe. Einer Schaar paralleler Geraden entspricht in dem anderen Systeme eine Schaar sich in einem Punkte der Gegenaxe schneidender Geraden; einer Schaar paralleler Geraden zur Gegenaxe in dem einen System entspricht eine Schaar von Parallelen zur Gegenaxe des anderen.

Es lässt sich nun ein Verfahren angeben, mit dessen Hilfe man zwei gegebene projectivische Systeme in perspectivische Lage versetzen kann. Dasselbe ist zugleich dazu anwendbar, den Beweis des wichtigen Satzes zu führen, dass zwei collineare Systeme stets in perspectivische Lage gebracht werden können, und daher pro-

jectivisch und collinear auch bei ebenen Systemen vollkommen aequivalente Begriffe sind.*) Man bestimme nämlich, wenn zwei collineare Systeme in einer Ebene liegen, zunächst die Gegenaxen j, i' beider Systeme und drehe eines der Systeme so, dass diese parallel werden. Dann nehme man auf j irgend einen Punkt E an, so entspricht diesem im anderen Systeme ein unendlich entfernter Punkt oder eine Richtung p', welche man immer so wählen kann, dass ihr in E eine parallele Linie p entspricht. Ebenso ziehe man durch einen zweiten beliebigen Punkt J von i eine Gerade q in der dem Punkte J im anderen Systeme entsprechenden Richtung q', so dass die bestimmte Gerade q' der Geraden q entspricht. Dann verschiebe man, indem j und i' immer parallel bleiben, die Systeme so, dass die Linie p mit p', die Linie q mit q', also der Durchschnitt $pq = O$ mit $p'q' = O'$ zusammenfällt, und es wird behauptet, dass die collinearen Systeme dann einen Büschel gemein haben, dessen Mittelpunkt $O(O')$ ist. In der That fallen zwei entsprechende Strahlenpaare p, p'; q, q' der beiden in O (O') vereinigten Büschel zusammen, ebenso ist die durch O zu i, j' gezogene Parallele ihnen gemein; denn sie verbindet den sich selbst entsprechenden Punkt O, O' mit dem unendlich fernen, sich selbst entsprechenden Durchschnitte von j und i'. Die beiden in O (O') vereinigten Büschel haben also drei zusammenfallende Strahlen und sind somit identisch. Nach einem früheren Satze sind daher beide Figuren projectivisch und liegen nunmehr auch perspectivisch. Um die Projectionsaxe zu finden, bemerke man, dass die Durchschnitte EE' irgend eines Strahles p des Büschels O mit den Strahlen $j\,i'$ die

Fig. 78.



*) Den Beweis dieses Satzes vermisse ich in der Darstellung v. Staudt's.

beiden Gegenpunkte auf der durch diese Gerade dargestellten Punktreihe sind. O ist der eine Doppelpunkt derselben, der andere wird der Durchschnitt E_0 mit der Projectionsaxe sein, auf der alle gemeinschaftlichen Punkte sich befinden. Es ist aber bekanntlich die Mitte zwischen den Gegenpunkten auch die Mitte zwischen den Doppelpunkten und darnach ist E_0 zu construiren.

Jedes Paar collinearer Ebenen kann, wie aus diesen Betrachtungen hervorgeht, auf vier verschiedene Weisen perspectivisch in eine Ebene gelegt werden; oder jedes collineare Ebenenpaar besitzt zwei Paare von Collineationscentren und zwei Paare von Collineationsaxen, wenn wir unter dieser Bezeichnung diejenigen Punkt- und Geradenpaare verstehen, welche bei der perspectivischen Lage bezüglich in das Collineationscentrum und die Collineationsaxe zusammenfallen. Denn wir haben aus unserer Construction erkannt, dass, wenn wir den collinearen Systemen die Lage geben, dass ihre Gegenaxen parallel laufen, die Vereinigung der zwei congruenten Büschel O, O' die perspectivische Lage liefert. Nennen wir die in Fig. 78 gegebene Lage die erste, so ist klar, dass man die Büschel OO' auch umgekehrt als es in dieser Figur geschehen ist, aneinanderlegen kann, so dass j, i' zu verschiedenen Seiten von O, O' liegen; dann muss nothwendigerweise eine neue Collineationsaxe $s_1 s_1'$ bestehen, deren Lage sich nach der nämlichen Regel wie oben bestimmen lässt. (Zweite Lage.) Man kann aber auch von der ersten Lage ausgehend, die beiden Figuren entgegengesetzt aneinander legen, d. h. man drehe das eine System um die Projectionsaxe um einen Winkel von 180 Grad, so findet man eine dritte Lage. Da die Figuren auch jetzt perspectivisch liegen, so muss ein Büschel vorhanden sein, welcher beiden gemeinschaftlich ist, $O_1 (O_1')$, der aber von $O (O')$ jedenfalls verschieden ist. Er liegt von j, i' ebensoweit entfernt als O, aber in entgegengesetzter Richtung. Klappt man dann schliesslich in der zweiten Lage eines der Systeme um die Axe $s_1 (s_1')$, so findet man die vierte, in welcher das Büschel $O_1 (O_1')$ mit dem der dritten Lage identisch ist, nur dass es die Strahlen umgekehrt auf einander gelegt enthält; man kann daher die

vierte Lage aus der dritten so ableiten, dass man die eine Ebene um O_1 (O_1') umklappt.

Da immer ein Paar von Linien und ein Paar von Büscheln bei der perspectivischen Lage zu Collineations-Axe und Centrum zusammenfallen, so sind die auf ihnen gelegenen Punktreihen und Strahlbüschel auch schon vor der perspectivischen Lage congruent. Jedes collineare Ebenenpaar besitzt also zwei Paare congruenter Punktreihen, und zwei Paare congruenter Strahlbüschel; und zwar laufen in jedem Systeme die beiden Geraden, denen congruente im anderen Systeme entsprechen, einander parallel. Jeder mit dieser Richtung parallelen Geraden entspricht eine Parallele zur anderen Richtung; die auf solchen Geraden gelegenen Punktreihen sind einander ähnlich.

Legt man nun die beiden collinearen Systeme so, dass ein Paar jener einander congruenten Geraden zu einer Collineationsaxe zusammenfallen, so liegen sie perspectivisch, welchen Winkel auch beide Ebenen mit einander machen. Dreht man die eine Ebene um diese Axe, so bewegt sich das Collineations- oder Projectionscentrum in einer gegen die Collineationsaxe senkrechten Ebene und beschreibt in dieser einen Kreis. Ist nämlich O das Centrum, S, J, I' die Durchschnitte einer auf der Collineations- und den Gegenaxen senkrechten Ebene, so bilden O, S, J, I' ein Parallelogramm, in welchem sich bei jener Drehung die Seitenlängen nicht, sondern nur die Winkel ändern. Liegt daher J fest, so beschreibt O um J einen Kreis mit dem Radius OJ.

§. 4.

Construction und Eigenschaften collinearer Figuren.

Um zwei collineare ebene Systeme zu erhalten, denke man sich in der einen Ebene zwei Büschel A, B, in einer anderen die collinearen A', B', so geben die Durchschnitte der Strahlen A, B und der entsprechenden A', B' collineare Systeme, wenn noch die Geraden AB und $A'B'$ als einander entsprechend angesehen werden. Denn es entspricht jedem Punkte nur ein Punkt und jeder Geraden wieder eine Gerade. Das erstere ist ohne Weiteres klar; um auch das letztere zu erweisen, so betrachte man die beiden Büschel

A, B und beziehe deren Strahlen so aufeinander, dass die entsprechenden sich auf einer gewissen Geraden schneiden; sie bilden dann collineare Systeme und liegen perspectivisch. Diesen beiden Büscheln entsprechen in der anderen Ebene zwei collineare und zwar unter sich collineare Büschel, welche ebenfalls perspectivisch liegen, weil die Gerade $A_1 B_1$ der Voraussetzung nach die zu AB zugeordnete ist und AB in der angegebenen Beziehung zu einander gehörige Strahlen vereinigt. Diese perspectivischen Büschel um A_1 und B_1 schneiden sich daher in einer Geraden, welche der in der ersten Ebene befindlichen entspricht.

Sollen also zwei ebene Systeme collinear auf einander bezogen werden, so kann man irgend zwei Büschel A, B und A', B' in beiden Ebenen als sich entsprechend voraussetzen und die Gerade AB der Geraden $A'B'$ zuordnen. Dann ist die Beziehung aller übrigen Punkte beider Systeme eindeutig festgestellt.

Ebenso kann man den Satz beweisen: Sollen zwei ebene Systeme collinear auf einander bezogen werden, so kann man zwei gerade Gebilde a, b des einen als collinear irgend zweien a', b' der anderen entsprechend annehmen, wenn zugleich der Durchschnitt von a, b dem von a', b' entsprechend angesehen wird.

Zur Bestimmung zweier Strahlenbüschel reicht es aus, 4 Punkte $ABCD$ zu geben, denn dann sind AB, AC, AD drei Strahlen in A und BA, BC, BD drei in B. Da nun diesen Büscheln andere 2 entsprechend gesetzt werden können, wenn $A'B'$ der Geraden AB entspricht, so hat man den Satz:

Sollen zwei ebene Systeme collinear auf einander bezogen werden, so kann man ein Viereck des einen als entsprechend einem Viereck im anderen ansehen. Dadurch ist die Beziehung beider Systeme eindeutig festgestellt.

Es könnte zunächst noch scheinen, sls ob es nöthig wäre, anzugeben, von welchen Ecken des Vierecks aus (vorhin AB und $A'B'$) die Collineation festgesetzt werden soll, und dass sich, wenn man die Strahlen CA, CB, CD mit $C'A', C'B', C'D'$ und DA, DB, DC mit $D'A', D'B', D'C'$ collinear annähme, eine andere collineare Beziehung er-

geben könnte. Dies ist aber nicht der Fall; denn aus der eindeutigen Beziehung der Punkte und Geraden, wie sie aus der ersten Annahme und Constructionsweise hervorgeht, folgt sofort die collineare Beziehung aller anderen entsprechenden Gebilde, also auch die der zuletzt erwähnten, die somit keine anderen Punkte als entsprechend ergeben werden, wie die Zusammensetzung der Strahlbüschel um A und B.

Nimmt man also in 2 Ebenen zwei beliebige Vierecke als entsprechend an, so ist dadurch die collineare Beziehung der beiden ebenen Systeme vollkommen bestimmt. Um zu einem Punkte P in $ABCD$ den entsprechenden P' in $A'B'C'D'$ zu finden, hat man P mit irgend zwei Ecken des Vierecks $ABCD$ zu verbinden, z. B. PA, PB zu ziehen, und dann $P'A'$, $P'B'$ so zu construiren, dass das Doppelverhältniss AP, AB, AC, AD gleich $A'P'$, $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$ und ebenso BP, BA, BC, BD gleich $B'P'$, $B'A'$, $B'C'$, $B'D'$ wird.

Jede lineale Construction, welche an dem einen Vierecke vollzogen wird und an dem anderen in entsprechender Weise, führt zu entsprechenden Punkten.

Dieser Gedanke ist von Möbius zum Ausgangspunkte in seiner Darstellung gemacht worden. Er hat nämlich gezeigt, dass man durch Verbindung der Durchschnitte gegenüberliegender Seiten neue Punkte auf den Seiten erhält, welche man wieder mit den schon bekannten verbinden kann; dadurch erhält man wieder neue Punkte und so fort in's Unendliche. So findet man ein aus unendlich vielen Geraden bestehendes Netz rein durch lineale Construction, dem daher ein aus dem anderen Vierecke gewobenes Netz collinear entspricht. Möbius hat nun gezeigt, dass ein solches Netz die ganze Ebene überdeckt, d. h. dass man sein Weben stets so weit fortsetzen kann, dass seine Maschen einem gegebenen Punkte beliebig nahe kommen, und dass sich die Knotenpunkte desselben eindeutig entsprechen, dass man also in der einen Ebene auf zwei Wegen zu einem und demselben Punkte gelangt, wenn dies in der anderen der Fall ist, und dass diese Wege sich stets vollkommen entsprechen. Wenn es gleich schwer sein dürfte, sich rein geometrisch in aller Strenge davon zu überzeugen,

dass man durch ein solches Netz zu jedem Punkte der Ebene gelangen kann, so folgt doch die eindeutige Bestimmtheit in der Beziehung beider Netze aus unseren Sätzen, wie schon bemerkt, ganz von selbst.

Indem Möbius aber die Definition collinearer Figuren wesentlich auf die Eigenschaft gründet, aus Vierecken durch lineale Construction hervorzugehen, so muss er den Beweis führen, dass man zwei beliebige Vierecke stets im Raume perspectivisch legen kann, wenn er die Projectivität als mit der Collineation identisch erweisen will.

Nach unserem Beweisgange aber steht dies schon fest und wir haben den Satz:

Zwei beliebige Vierecke können stets als Schnitte eines und desselben Vierkantes angesehen werden und zwar auf zweierlei wesentlich verschiedene Weisen.

Und ferner:

In den Ebenen zweier beliebigen Vierseite gibt es stets 2 Paare von Punkten, welche mit den entsprechenden 6 Ecken derselben entsprechende congruente Strahlensysteme bilden.

In den Ebenen zweier beliebigen Vierecke gibt es stets zwei Paare von Geraden, welche von den Seiten der Vierecke in 6 Punkten geschnitten werden, die bezüglich gleich weit von einander abstehen. Diese beiden Geraden jedes Vierecks sind zu einander parallel. Jeder Punkt derselben, welcher auf ihnen durch eine lineale Construction aus dem Viereck gefunden werden kann, steht von jenen 6 Punkten ebenso weit ab, wie der entsprechende von den entsprechenden 6 des anderen Viereckes.

Zwei Vierecke können auf vierfache Weise in einer Ebene perspectivisch gelegt werden.

Die zahlreichen interessanten metrischen Beziehungen, welche zwischen collinearen Gebilden bestehen, lassen sich mit Hilfe vorstehender Betrachtungen leicht erweisen.

Man denke sich zwei solche Systeme in perspectivischer Lage, so werden sich im Centrum O alle sich selber entsprechenden Geraden schneiden. Es seien j, i' die parallelen Gegenaxen und man ziehe durch O irgend eine Gerade, auf der zwei entsprechende Punkte P, P' liegen; es seien J, I' deren Durchschnitte mit j, i' also die Gegenpunkte der Geraden, so

ist $JP \,.\, I'P' = \text{const.}$, wenn P, P' sich irgendwie auf der Geraden bewegen. Bezeichnen p, p' die Entfernungen zwischen P, P' und den Gegenaxen, so ist daher $p . p' = \text{const.}$ für alle Punkte der Geraden P, P'. Dreht sich diese Gerade um O, so bleibt diese Constante ungeändert, da dieselbe immer dem Producte der von O auf die Gegenaxen gefällten Perpendikel gleich ist. Hebt man nun die beiden collinearen Systeme von einander ab, dass sie nicht mehr in perspectivischer Lage sich befinden, so hat man den Satz:

Das Product aus den Perpendikeln entsprechender Punkte auf die Gegenaxen ist in zwei collinearen Figuren constant.

Sind die durch einen Punkt gehenden Geraden a, b, t den Geraden a', b', t' entsprechend, so hat man nach den Gleichungen, welche die collinearen Beziehungen zweier Büschel ausdrücken:

$$\frac{\sin at}{\sin tb} = \lambda \frac{\sin a't'}{\sin t'b'}$$

welches auch der Strahl t sei. Für jeden Punkt des Strahles t ist aber $\frac{\sin at}{\sin tb} = \frac{p}{q}$, wobei p und q die Längen der von irgend einem Punkte der Linie t auf a und b gefällten Perpendikel bezeichnen, und man hat den Satz: Bei zwei collinearen Systemen ist das Verhältniss der Perpendikel eines Punktes auf zwei feste Gerade $\frac{p}{q}$ gleich dem Verhältniss der entsprechenden Perpendikel multiplicirt mit einer Constanten; $\frac{p}{q} = \lambda \frac{p'}{q'}$. Nimmt man noch eine dritte Gerade c hinzu und bezeichnet das Perpendikel auf diese mit r, so hat man:

$$\frac{p}{q} = \lambda \frac{p'}{q'}, \qquad \frac{q}{r} = \mu \frac{q'}{r'}$$

Also: Zwischen den von entsprechenden Punkten auf die Seiten entsprechender Dreiecke gefällten Perpendikeln besteht die Proportion:

$$p : q : r = \lambda' p' : \mu' q' : \nu' r'$$

wo $\lambda'\ \mu'\ \nu'$ Constanten sind in Bezug auf die Variabilität des Punktes p, q, r.

In dualer Beziehung hiezu stehen die Sätze, welche aus

$$\frac{AT}{TB} = \lambda \frac{A'T'}{T'B'}$$

hervorgehen, wo T ein Punkt auf der Geraden AB ist. Legt man nämlich durch ihn eine Gerade, so ist $\frac{AT}{TB}$ dem Verhältniss der Perpendikel von A und B auf dieselbe gleich, und der Satz lautet daher:

Fällt man von den Ecken eines beliebigen Dreiecks die Perpendikel $p\,q\,r$ auf eine Gerade und sind $p'q'r'$ die entsprechenden Perpendikel, so besteht die Proportion:

$$p : q : r = \lambda' p' : \mu' q' : \nu' r',$$

Sind $ABCDEF$ irgend sechs Punkte, und M der Durchschnitt von AB mit CD; N der von AB und EF, so ist $(ABMN) = (A'B'M'N')$. — Nun hat man:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{ACD}{BCD}, \quad \frac{AN}{NB} = \frac{AEF}{BEF},$$

wo letzteres die Flächen der Dreiecke sind, also

$$(A\,B\,M\,N) = \frac{ACD}{CDB} : \frac{AEF}{EFB}$$

und dies Doppelverhältniss der 4 Dreiecke bleibt sich daher in beiden Systemen gleich.

Einen besonderen Fall der collinearen Beziehung hat Möbius mit dem Namen der Affinität bezeichnet; es ist der, wo die beiden Gegenaxen im Unendlichen liegen, also den unendlichen Punkten der einen Figur auch in der anderen die unendlich entfernten entsprechen. Es folgt daraus sofort:

Bei affinen Systemen theilen entsprechende Punkte entsprechende Gerade in ähnlichen Systemen. Parallelen in dem einen Systeme entsprechen Parallelen im anderen; einem Parallelogramme entspricht wieder ein solches. Demnach ist jetzt die Grösse $\lambda = +1$, und es gilt der Satz:

Sind p, q, r die Entfernungen eines Punktes von drei festen Geraden, $p'q'r'$ die entsprechenden Entfernungen in einem zum ersten affinen Systeme, so ist:

$$p : q : r = p' : q' : r'$$

Dieselbe Proportion gilt auch, wenn p, q, r die Entfernungen einer veränderlichen Geraden von drei festen darstellen.

Geht man auf die Entstehung collinearer Figuren durch Projection zurück, so sieht man, dass die unendlich entfernten Geraden beider Ebenen nur dann sich entsprechen können, wenn entweder der Projectionspunkt oder die Projectionsaxe ins Unendliche rückt. Der letztere Fall, bei welchem die Figuren ähnlich werden, ist offenbar in dem Begriffe der affinen Figur eingeschlossen. Wir betrachten in's Besondere den anderen, in dem die eine Figur durch Parallelprojection aus der anderen im Raume hervorgeht. Dann ist klar, dass alle mit der Collineationsaxe parallelen entsprechenden Geraden congruente Punktsysteme enthalten, man beide Ebenen also in irgend einer derselben an einander legen kann, ohne dass die Systeme aufhören parallel projectivisch zu sein.

Legt man beide Systeme, wie dies früher bei irgendwelchen collinearen Systemen geschehen ist, mit den Collineationsaxen aufeinander, so fällt das Centrum $O\,(O')$ als zweiter Doppelpunkt der durch ihn hindurchgehenden Projectionsstrahlen in's Unendliche, und aus der die Lage entsprechender Punkte bestimmenden Gleichung

$$\frac{PO}{PS} = \lambda\,\frac{P'O}{P'S}$$

wo S der Durchschnitt der Geraden P, P' mit der Collineationsaxe ist, wird jetzt:

$$\lambda\,.\,PS = P'S,$$

d. h.: Sieht man in zwei affinen Figuren die Affinitätsaxe als Abscissen-, eine andere Richtung als Ordinatenaxe an, so sind die Abscissen entsprechender Punkte gleich, die Ordinaten der einen aber denen der anderen proportional.

Die Fläche eines Parallelogrammes, dessen Seiten diesen beiden Axen parallel sind, steht daher zu der des entsprechenden in einem constanten Verhältniss und da jede beliebige Fläche durch solche Parallelogramme ersetzt werden kann, so gilt der schöne Satz:

In affinen Gebilden stehen die Flächen entsprechender Figuren in constantem Verhältnisse.

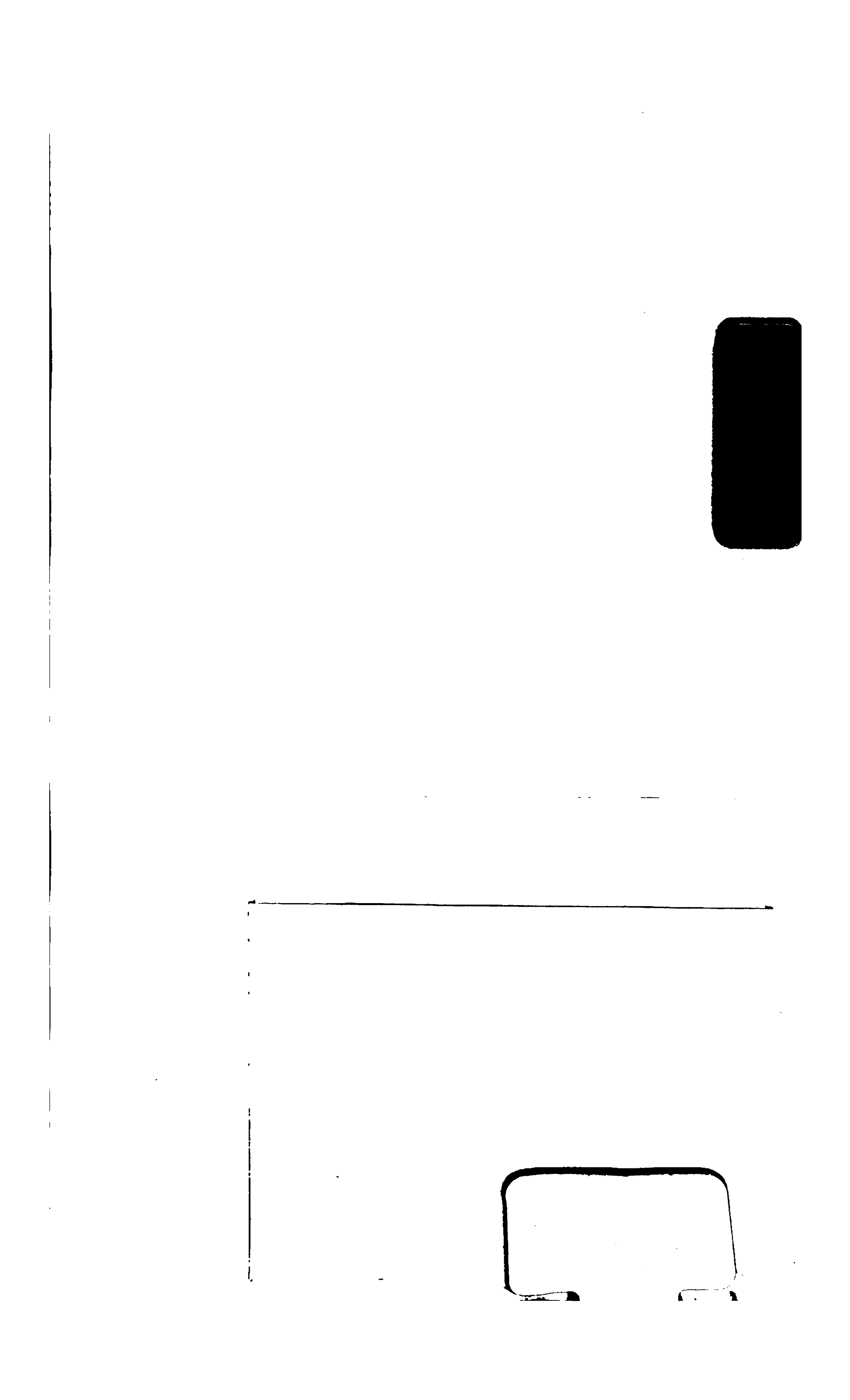
Wir haben bisher nur von einer Richtung gesprochen, nach welcher alle Geraden, die sich entsprechen, von entsprechenden Punkten in gleiche Theile getheilt werden. Es

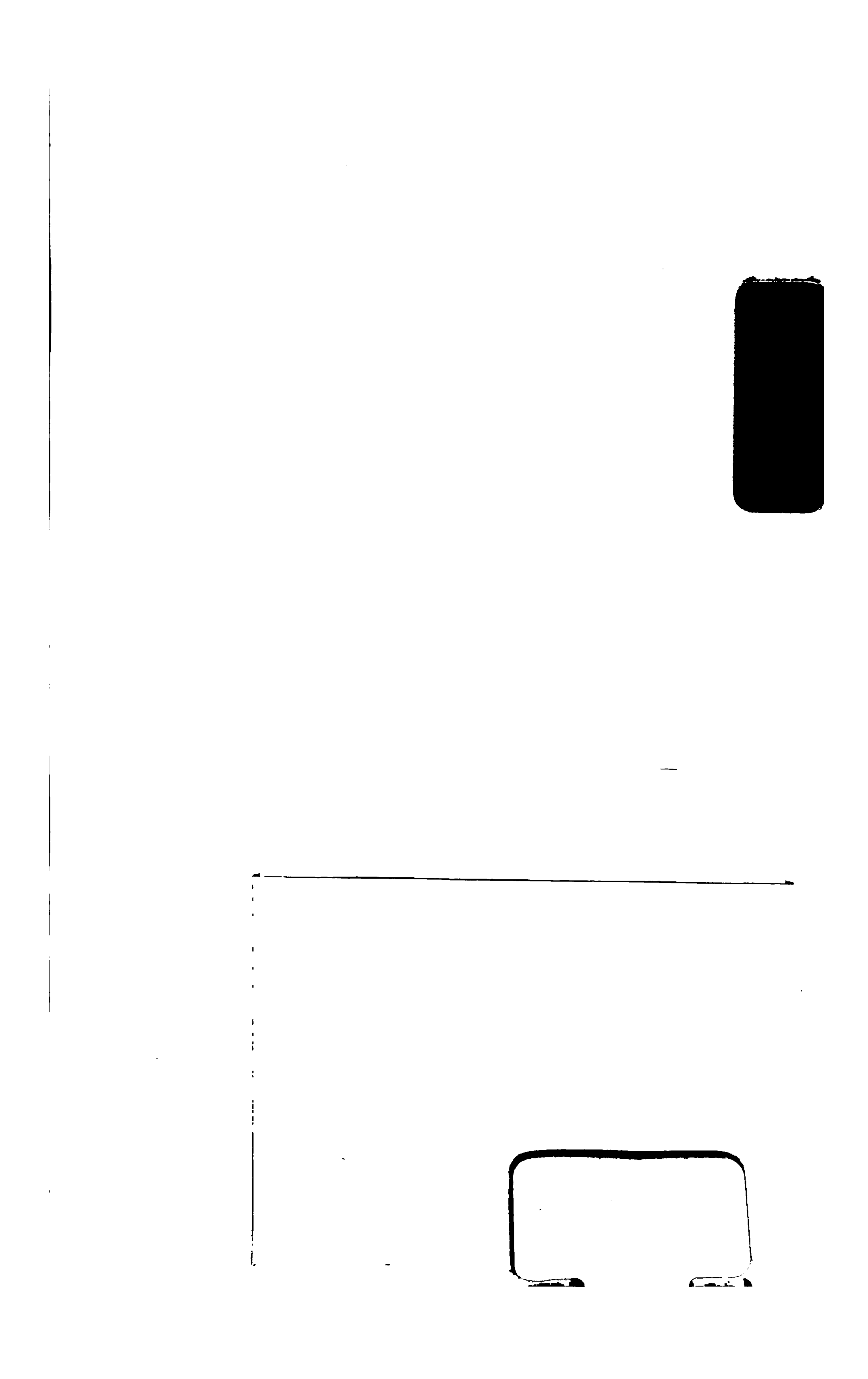
gibt aber noch eine zweite derartige Richtung, die man nach folgender Vorstellung leicht finden kann.

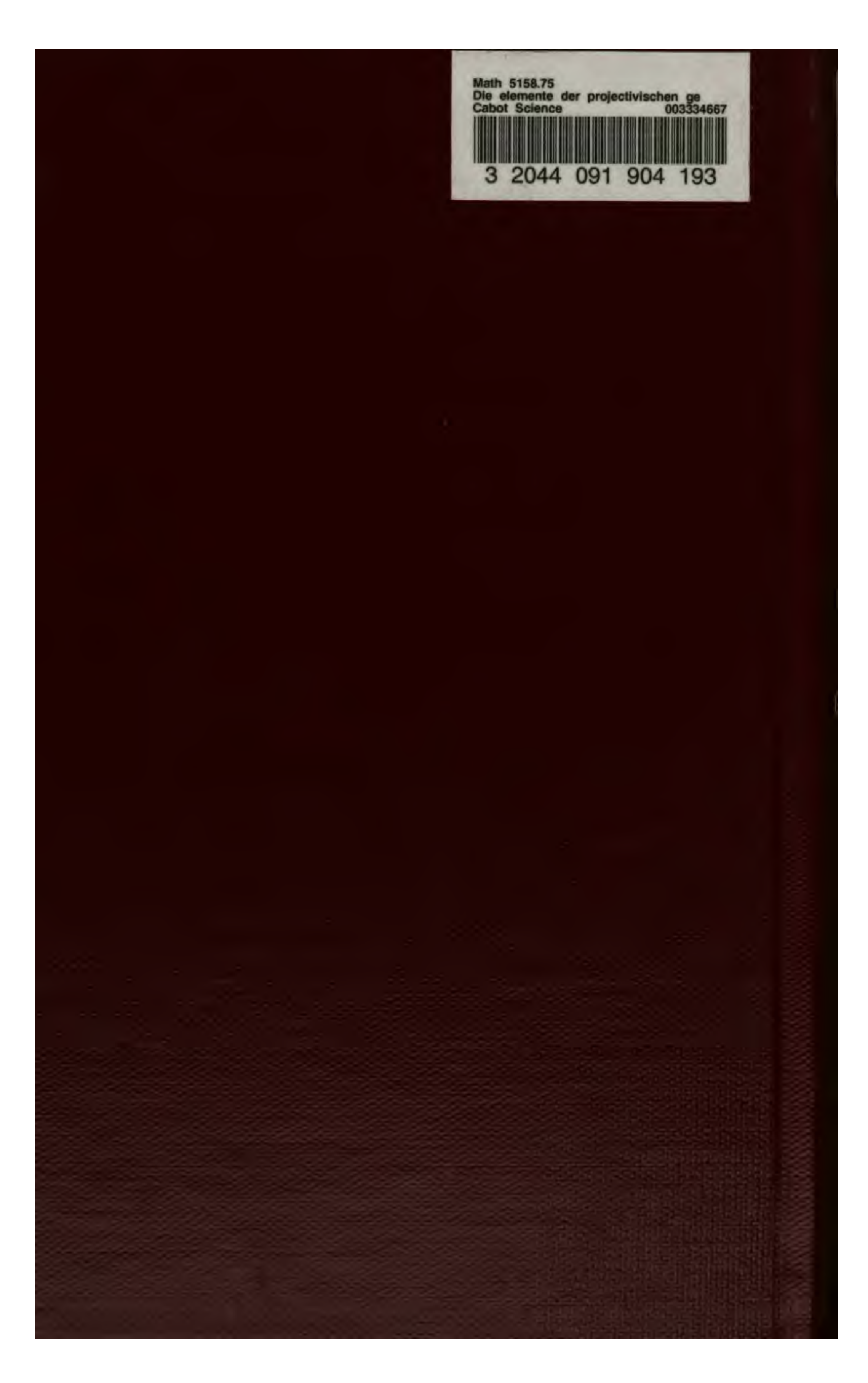
Man denke sich in der einen Ebene einen Kreis mit dem Mittelpunkte C und dem Durchmesser ACB, der parallel dem Durchschnitte der beiden affinen Ebenen ist. Diesen Kreis projicire man nun durch die Parallelprojection auf die andere Ebene, so dass ihm eine Ellipse entspricht, mit dem Mittelpunkte C' entsprechend C; denn die Mittelpunkte aller Ellipsen, in denen ein schiefer Kreiscylinder geschnitten werden kann, liegen in einer Axe desselben. Es wird dem Durchmesser ACB ein Durchmesser $A'C'B'$ entsprechen, der ihm gleich ist; d. h. die Geraden ACB, $A'C'B'$ werden durch entsprechende Punkte in gleiche Theile getheilt; dies ist die Richtung der Affinitätsaxen, die wir schon kennen gelernt haben. Es gibt aber noch einen anderen Durchmesser ECD, welcher einem Durchmesser der Ellipse $E'C'D'$ entspricht, und den man findet, wenn man den Kreis und die Ellipse concentrisch in eine Ebene legt; ausser ACB haben sie dann noch den Durchmesser ECD gemein und dieser gibt eine andere Richtung an, in welcher alle entsprechenden Geraden congruente Systeme enthalten, also als Affinitätsaxen angesehen werden können.

Nur wenn die Richtung der Parallelprojection parallel ist einer Ebene, die senkrecht auf der Durchschnittslinie beider Ebenen steht, fallen jene beiden Richtungen in eine zusammen.

Hat man durch Parallelprojection zu einer Figur ihre affine construirt und dreht man die eine um den gemeinschaftlichen Durchschnitt beider Ebenen, so werden in jeder neuen Lage sämmtliche Projectionsstrahlen einander parallel sein. Denn seien AB, $A'B'$ zwei entsprechende Punktpaare, so werden sich AB, $A'B'$ in S auf der Collineationsaxe schneiden und $AS:BS = A'S:B'S$ sein; dreht man nun die Ebene, so bleibt diese Proportion immer erhalten und es werden daher AA' und BB' immer parallel bleiben.






Math 5158.75
Die elemente der projectivischen ge
Cabot Science 003334667
3 2044 091 904 193